TD4 : Modules noetheriens et entiers p-adiques

Indications de correction

Exercice 2

Si M est noetherien, tout sous-module et tout quotient de M le sont d'où le sens direct.

Réciproquement $Im(i)$ est isomorphe à M' donc noetherien. Comme $Ker(\pi)/Im(i)$ est aussi noetherien on en déduit que $Ker(\pi)$ est noetherien. M'' est isomorphe à $M/Ker(\pi)$ est noetherien et comme $Ker(\pi)$ est noetherien on en conclut que M est noetherien.

Exercice 4

La suite d'idéaux $(Ker(u^n))$ est croissante donc stationnaire. Pour n tel que $Ker(u^n) = Ker(u^{n+1})$ si x $Ker(u^n)$ est tel que $x = u^n(y)$ alors $u^{2n}(y) = 0$ d'où $y \in Ker(u^{2n}) = Ker(u^n)$ d'où $x = 0$.

Si u est surjectif, u^n aussi et la question précédente donne u^n injectif et donc u injectif.

Exercice 5

Par l'absurde s'il existe x ne vérifiant pas ce qu'on veut alors on considère l'ensemble des éléments n'admettant pas de décomposition comme dans l'énoncé. Il nous faut une relation d'ordre on a la divisibilité, mais à association près. On considère donc l'ensemble des idéaux principaux engendrés par les éléments n'admettant pas de décomposition. Zorn nous donne un élément maximal (pour l'inclusion) $I = (x)$. x n'est pas irréductible sinon $x = x$ serait une décomposition. On peut alors écrire $x = ab$ avec a et b non inversibles. Alors a ou b, disons a n'admet pas de décomposition mais (x) est strictement contenu dans (a) ce qui contredit la maximalité de (x).

Exercice 6

Insistons sur le fait qu'on requiert l'intégrité dans les définitions d'anneaux euclidiens, principaux, factoriels.

1. La noetherianité donne la propriété d'existence. Une fois qu'on a l'existence, la propriété d'unicité est équivalente au lemme de Gauss, c'est-à-dire qu'il nous faut montrer que si p est irréductible, alors l'idéal (p) est premier. On prend M maximal contenant (p) , l'hypothèse donne $M = (a)$ d'où $a \mid p$ d'où $M = (p)$ (p irréductible) donc (p) est maximal, a fortiori premier.

2. Pour I idéal premier non nul on prend x de longueur minimale dans I (la longueur de x est la plus petite valeur de $\alpha_1 + ... + \alpha_r$ pour $x = up_1{}^{1} ... p_r{}^{r}$). Ce choix impose que x est irréductible d'où $(x) \subset I$. On prend $M = (a)$ maximal contenant I, a divise x et on conclut $(x) = M = I$.

3. Supposons A non principal. Par Zorn sur l'ensemble des idéaux non principaux de A (non vide par hypothèse) on a I maximal parmi les non principaux. I n'est pas premier car sinon d'après **2**. il serait maximal principal donc on peut trouver p irréductible tel que I est strictement contenu dans (p). p divise alors tous les éléments de I ; on pose alors $J := \{a \in A, ap \in I\}$. En considérant un élément de longueur minimale dans J, on voit que J contient strictement I, et donc J est principal par maximalité de I : $J = (x)$. Mais alors $I = (px)$ contradiction .

Exercice 9

1. *Existence* On sait qu'on a le résultat dans $\mathbb{Z}_p$. On écrit donc $a = p^k u$ et $b = p^l v$ et alors a/b a la forme voulue.

Unicité $x = up^k = vp^l$ implique $uv^{-1} = p^{l-k}$ en prenant les valuations on trouve $k = l$ puis $u = v$.

2. ok

3. On écrit $x = up^{n_0}$ et le développement de Hensel $u = \sum_{n \geqslant 0} u_n p^n$. On obtient $x = \sum n \geqslant n_0 x_n p^n$ avec $x_n = u_{n-n_0}$. Si $x_{n_0} \neq 0$ alors $p^{n_0} \mid x$ ce qui donne $n_0 \leqslant \nu(x)$. Si $p^{n_0+1} \mid x$ alors $x_{n_0} = 0$ d'où $\nu(x) < n_0 + 1$. Donc $\nu(x) = n_0$.