Td n° 4 d'Analyse fonctionnelle

Distributions et convolution 2

Séance du 6 mars 2010

Exercice 1. *Approximation de l'identité et convolution dans L^p*

1. Soit $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\|\phi * \psi\|_{L^p} \leq \|\phi\|_{L^1} \|\psi\|_{L^p}$

2. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ positive, $\|\phi\|_{L^1} = 1$ et $\operatorname{Supp} \phi \subset B(0,1)$. On pose $\phi_m(x) = m^n \phi(mx)$. Si f est continue (bornée), montrer que $\phi_m * f \to f$ uniformément sur les compacts. En déduire que si pour tout $p < \infty$, si $f \in L^p$:

$$\|f * \phi_m - f\|_{L^p} \to 0 \quad \text{quand} \quad m \to \infty.$$

Que se passe-t-il pour L^∞ ? En déduire que $\mathcal{D}$ est dense dans L^p, $p < \infty$.

3. Soient $p, q, r \geq 1$ tels que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer l'on a :

$$\|\phi * \psi\|_{L^r} \leq \|\phi\|_{L^p} \|\psi\|_{L^q},$$

et montrer que l'on peut étendre la convolution à $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$ en une application bilinéaire continue.

⋆

Exercice 2. *Solution élémentaire du laplacien*

On souhaite trouver les solutions de $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

1. Calculer $\Delta(|x|^\alpha)$ dans $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$:

$$< \Delta \frac{1}{|x|^{N-2}}, \phi >= \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon} (|x|^{2-N} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial |x|^{2-N}}{\partial n}) d\sigma_\epsilon,$$

où $d\sigma_\epsilon$ est la mesure de surface sur ∂B_ϵ et $n(x) = \frac{x}{|x|}$ est la normale extérieure à B_ϵ.

3. Montrer que $-\Delta(\frac{1}{|x|^{N-2}}) = (N-2) mes(\mathbb{S}^{N-1}) \delta_0$ au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

4. Exhiber une solution explicite (au sens des distributions) de $-\Delta u = f$ si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $N \geq 3$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$, à quelle condition sur p a-t-on $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$?

5. Montrer que $-\Delta(-\frac{1}{2\pi} ln(|x|) = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'$.

⋆

Exercice 3. *Propriété de la moyenne*

Soit $n \geq 2$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f \in C^0(\Omega)$ vérifie la propriété de la moyenne si :

$$\forall x \in \Omega, r > 0 \text{ tels que } B(x,r) \subset \Omega, \quad f(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} f(s) ds.$$

1. On considère $(f_k)_k$ une suite de fonctions sur Ω vérifiant la propriété de la moyenne, qui convergent, au sens des distributions. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sa limite.

Montrer que la suite $(f_k)_k$ converge uniformément sur tout compact de Ω, et que T vérifie la propriété de la moyenne.

Indication : On pourra considérer les fonctions $\phi_{x,r}(y) = \psi(|x-y|/r)$, $\psi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ fixée.

2. Montrer qu'une fonction f de classe C^2 vérifiant la propriété de la moyenne satisfait :

$$-\Delta f = 0.$$

Indication : On pourra faire un développement de Taylor de f à l'ordre 2.

3. En déduire que si $f \in C^0$ vérifie la propriété de la moyenne, alors $-\Delta f = 0$ au sens des distributions.

4. Réciproquement, si T est une distribution vérifiant $-\Delta T = 0$, alors T s'identifie à une fonction $f \in C^\infty(\Omega)$ vérifiant la propriété de la moyenne.

Indication : On commence par montrer cette propriété pour $f \in \mathcal{C}^\infty$. Pour cela on peut calculer $\int_{B(0,r)} f\Delta(|x|^2 - r^2)$.

$\star$