Td n° 4 d'Analyse fonctionnelle

Opérateurs compacts – Espaces de Hilbert

Séance du 6 Mars 2015

Exercice 1. *Opérateurs à noyaux*

Soit (X,μ) et (Y,η) deux espaces mesurés et $k \in L^2(X\times Y, \mu\times\eta)$. Pour tout $f \in L^2(Y,\eta)$, on définit

$$Tf(x) = \int_Y k(x,y)f(y)d\eta(y).$$

1. Montrer que $T : L^2(Y,\eta) \to L^2(X,\mu)$ est continu et compact.

2. On suppose que $X = Y$ et que l'unique solution de l'équation

$$f(x) = \int_Y k(x,y)f(y)d\eta(y)$$

est la solution triviale, $f = 0$. Montrer que pour tout $g \in L^2(X,\mu)$ il existe une unique solution $f \in L^2(X,\mu)$ de l'équation

$$f(x) = g(x) + \int_Y k(x,y)f(y)d\eta(y).$$

3. En déduire que pour tout $g \in L^2([0,1])$, il existe un unique $f \in L^2([0,1])$ tel que

$$f(x) = g(x) + \int_0^x f(t)dt.$$

⋆

Exercice 2. *Convergence faible dans un Hilbert*

Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\geq 1}$ une base hilbertienne.

1. Montrer qu'une suite bornée (x_n) converge faiblement si et seulement si pour tout p, $(e_p|x_n)$ admet une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $n\to\infty$. En déduire que $e_n \rightharpoonup 0$.

2. Quelle est l'adhérence faible de la sphère unité $\mathbb{S} = \{x \in H \,|\, \|x\| = 1\}$?

3. On considère $F = \{e_m + me_n | m,n \geq 1\}$. 0 est-il dans l'adhérence séquentielle faible de F ? Et dans l'adhérence séquentielle faible de l'adhérence séquentielle faible de F ? Qu'en conclure ?

⋆

Exercice 3. *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*

Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne (e_n) de H telle que $\sum_n \|Te_n\|^2 < \infty$.

1. Soit (f_p) une base hilbertienne de H. Montrer que

$$\sum_p \|T^*f_p\|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2.$$

En déduire que pour toute base hibertienne $(\tilde{e}_m)$ de H,

$$\sum_m \|T\tilde{e}_m\|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2.$$

On note cette quantité $\|T\|_{HS}^2$.

2. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est compact. Que dire de la réciproque ?

3. On suppose que $H = L^2(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction $L^2(\Omega \times \Omega)$. On définit

$$(T_K f)(x) = \int K(x,y)f(y)dy.$$

Montrer que pour toute base hilbertienne (e_n) de $L^2(\Omega)$ on a

$$\|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}^2 = \sum_n \|T_K e_n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

4. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\Omega)$ s'écrit de manière unique sous la forme T_K.

$\star$

Exercice 4. *Théorème de Krein-Rutman*

Soit E un espace de Banach, et soit C un cône convexe de sommet 0 (pour tout $x, y \in C$ et $\lambda, \mu \geq 0, \lambda x + \mu y \in C$). On suppose C fermé, d'intérieur non vide et $C \cap (-C) = \{0\}$. Soit T un opérateur compact tel que $T(C \setminus \{0\}) \subset Int(C)$. On fixe $u \in IntC$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in C$,

$$\|x + u\| \geq \alpha.$$

2. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $Tu - ru \in C$.

3. On suppose qu'il existe $x \in C$ et λ tel que $T(x + u) = \lambda x$. Montrer que $\lambda \geq r$.

Indication : On pourra montrer que pour tout n, $\left(\frac{\lambda}{r}\right)^n x - u \in C$.

4. En utilisant le théorème du point fixe de Schauder, montrer qu'il existe $x \in C$ tel que

$$T(x + u) = \|x + u\|x.$$

5. En appliquant le même processus à εu, et en faisant tendre e vers 0, montrer qu'il existe $x_0 \in C \setminus \{0\}$ et $\mu_0 > 0$ tels que

$$T(x_0) = \mu_0 x_0.$$

6. Soit $x \in C \setminus \{0\}$ tel que $T(x) = \mu x$. Montrer que $\mu = \mu_0$ et $x = mx_0$.

Indication : On pourra montrer qu'il existe β telle que $x_0 - \rho x \in C$ pour $0 \leq \rho \leq \beta$ et $x_0 - \rho x \notin C$ pour $\rho > \beta$.

7. Soit $x \in E$ tel que $T(x) = \mu x$. Montrer que $\mu \leq \mu_0$.

$\star$