Analyse Complexe TD 4 Corrigé (6/03 - 9/03)

Exercice 1

1. On peut traiter les deux produits comme des produits téléscopiques, ce qui permet de les calculer une fois qu'on a montré leur existence.
1. Pour le premier, on utilise
$$1 + z^{2^k} = \frac{1 - z^{2^{k+1}}}{1 - z^{2^k}}. \tag{1}$$
Pour la convergence du produit, on constate que l'expression ne peut avoir de sens que pour $|z| < 1$, et que dans ce cas, le critère de convergence des produits infinis est largement vérifié dans tout compact de $\mathbb{D}$.
Il y a une autre façon de faire. En effet, on peut montrer cette formule en utilisant la décomposition en base 2 des entiers, mais avant il faut constater une propriété utiles. On se donne $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des séries entières qui convergent sur le disque unité $\mathbb{D}$. On suppose que $f_n(0) = 1$ pour tout n, et que le produit infini $\prod f_n$ converge sur tous les compacts du disque. Le résultat est une fonction holomorphe sur le disque f, qui se développe donc en série entière. Les coefficients de ce développement coincident alors ceux que l'on obtient en faisant le produit entre les f_n en tant que séries formelles. Réciproquement, si la série formelle produit des séries des f_n converge absolument sur $\mathbb{D}$, alors elle définit une série entière qui doit être la limite des produits à support fini de f_n.
En particulier, si on développe formellement le produit $\prod(1 + z^{2^k})$, en utilisant la décomposition des entiers en base 2, on obtient la série formelle $\sum x^n$, et l'argument précédent montre que les deux séries coincident effectivement en tant que fonctions.
2. Ici, la convergence est uniforme sur les compacts de $\mathbb{C}$. Il ne semble pas il y avoir d'interprétation intelligente du résultat, et l'argument téléscopique
$$\cos \frac{\pi z}{2^n} = \frac{2^{n-1} \sin \frac{\pi z}{2^{n-1}}}{2^n \sin \frac{\pi z}{2^n}}. \tag{2}$$

2. Si on adapte l'argument précédent sur les séries entières aux séries de Dirichlet (de la forme de la fonction zêta), la formule de produit pour la fonction zêta est obtenue directement à partir de la factorisation des entiers en facteurs premiers.
On peut aussi le faire par récurrence (ce qui revient au fond au même), en commençant par factoriser les facteurs premiers p_1^k. On pose $\zeta_k(s) = \sum\{n^{-s} \mid p_1, \dots, p_k \nmid n\}$. Alors
$$\zeta(s) = \sum_k p_1^{-ks} \zeta_1(s) = \frac{1}{1 - p_1^{-s}} \zeta_1(s) = \cdots = \prod_1^k \frac{1}{1 - p_j^{-s}} \zeta_k(s). \tag{3}$$
Il reste à vérifier que $\zeta_k \to 1$ quand $k \to \infty$.

3. Il y a deux façons de faire (au moins). On peut reprendre l'identité pour le sinus, et translater, rassembler les termes. L'autre façon est de repartir de l'identité pour la cotangente, et montrer la formule directement.
1.
$$\cos \pi z = \sin \pi(1/2 - z) = \pi(1/2 - z) \prod_{k\geq 1} 1 - \frac{(1/2 - z)^2}{k^2}. \tag{4}$$
On considère que
$$1 - \frac{(1/2 - z)^2}{k^2} = \frac{(k + 1/2 - z)(k - 1/2 + z)}{k^2}. \tag{5}$$
Il faut regrouper les termes différemment. Il suffit de prendre un produit fini pour faire les calculs pour se convaincre que c'est légal :
$$(1/2 - z) \prod_{k=1}^N \frac{(k + 1/2 - z)(k - 1/2 + z)}{k^2} = (N+1/2) \prod_{k=1}^N \frac{(k - 1/2)^2}{k^2} (1 - \frac{z}{N + 1/2}) \prod_{k=1}^N 1 - \frac{z^2}{(k - 1/2)^2}. \tag{6}$$
On a
$$\log \prod_1^N \frac{(k - 1/2)^2}{k^2} (1 - \frac{z}{N + 1/2}) = \sum_1^N 2 \log 1 - 1/2k = -\log N + c + \mathcal{O}(1/N) \tag{7}$$
où c est une constante. En particulier, $N \prod_1^N (1 - 1/2k)^2$ a une limite. Ceci permet de conclure que
$$\cos \pi z = K \prod_k 1 - \frac{z^2}{(k - 1/2)^2} \tag{8}$$

où K est une constante non nulle. Mais pour identifier la constante ($K = 1$), il suffit de calculer $\cos(0) = 1$.
2. Autre méthode. On écrit

$$\pi \tan(\pi z) = -\sum_k \frac{2z}{z^2 - (k+1/2)^2}. \tag{9}$$

Puis, $\pi \tan \pi z = -\cos(\pi z)'/\cos \pi z$. On intègre terme à terme pour obtenir une détermination locale de $\log \cos$. Encore une fois, on obtient la bonne formule à une constante près, et il s'agit d'identifier la constante avec $\cos(0) = 1$.

Exercice 2 Théorème de Paley-Wiener pour les fonction C^∞.

1. Pour montrer que la transformée de Fourier a un prolongement, considère dans la formule définissant la transformée que c'est une intégrale à paramètre holomorphe, qui fait parfaitement sens pour $\xi \in \mathbb{C}$. Ensuite, on calcule directement

$$|\widehat{\phi}(\xi)| = \left| \int_{-A}^{A} e^{-ix\xi} \phi(x) dx \right| \leq \int_{-A}^{A} e^{x\Im\xi} |\phi(x)| dx \leq e^{A|\Im\xi|} \int |\phi|. \tag{10}$$

Ensuite, on utilise l'astuce habituelle :

$$|\xi^N \widehat{\phi}(\xi)| = |\widehat{\phi^{(N)}}(\xi)| \tag{11}$$

Comme $\phi^{(N)}$ vérifie aussi les hypothèse de l'exercise, on obtient l'inégalité recherchée.

2. Il y a deux parties. D'abord on définit ϕ de classe Schwarz telle que $f = \widehat{\phi}$. Ensuite on vérifie que ϕ est à support compact. Posons

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(\xi) d\xi. \tag{12}$$

Vu que f satisfait les bornes annoncées, on peut prouver que f' aussi, et de même pour toutes les dérivées de f, qui est donc de classe Schwarz sur $\mathbb{R}$. Ceci implique que la fonction ϕ ainsi définie est elle aussi de classe Schwarz sur $\mathbb{R}$.
D'après les inégalités annoncées sur f, on trouve que pour tout $B \in \mathbb{R}$,

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi - xB} f(\xi + iB) d\xi. \tag{13}$$

En particulier, pour $x > A$, en prenant la limite $B \to +\infty$, on trouve que $\phi(x) = 0$. Pour $x < -A$, on prend $B \to -\infty$ pour conclure.

Exercice 3 Comptage de zéros, I.

1. *Formule de Jensen* On commence par constater que quand f n'a pas de zéro, c'est juste la formule de la moyenne appliquée à une détermination du log de f sur le disque $\mathbb{D}$. Par ailleurs, c'est une formule multiplicative. Autrement dit, si elle est vrai pour f et pour g deux fonctions holomorphes, alors elle est aussi vrai pour fg.
Pour conclure, il suffirait de pouvoir trouver pour tout $z \in \mathbb{D}$, une fonction f_z qui satisfait la formule, et qui s'annule exactement en z. On peut penser aux polynômes, mais c'est plus pratique d'utiliser les automorphismes du disque. Ils sont de module 1 sur le bord. Donc il suffit de vérifier que le membre de gauche s'annule. Mais si $f_z(w) = (w-z)/(1-\overline{z}w)$, alors $f_z(0) = -z$, et f_z satisfait la formule effectivement.

2. * *Formule de Carleman* On cherche une formule similaire. On considère donc de nouveau une fonction f qui ne s'annule pas sur un voisinage du demi-disque. Écrivons alors une formule de Cauchy pour $\log f$. Soit $\epsilon > 0$.

$$2\pi \log f(\epsilon) = \int_{-\pi}^{\pi} \log f(e^{i\theta}) d\theta - \int_{-1}^{1} \frac{\log f(it)}{it - \epsilon} dt \tag{14}$$

Pour déterminer la limite du deuxième terme du membre de droite quand $\epsilon \to 0$, on intègre par parties

$$\int_0^1 \frac{g(t)}{t + i\epsilon} dt = g(1)\mathcal{O}(\epsilon) - g(t)\log(i\epsilon) - \int_0^1 g'(t) \log t + i\epsilon dt. \tag{15}$$

Ainsi,

$$-\int_{-1}^{1} \frac{\log f(it)}{it - \epsilon} dt = i\left(\log f(0)(-\log i\epsilon + \log -i\epsilon) - i\int_{-1}^{1} \log t \frac{f'}{f}\right) + \mathcal{O}(\epsilon). \tag{16}$$

Si on garde la partie réelle, on trouve

$$\pi \log |f(0)| + \int_{-1}^{1} \log t \Re \frac{f'}{f}(it) dt + \mathcal{O}(\epsilon). \tag{17}$$

Il vient

$$\pi \log |f(0)| = \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta + \int_{-1}^{1} \log t \Re \frac{f'}{f}(it) dt. \tag{18}$$

Maintenant, si a est dans le demi-disque, on considère la fonction $f(z) = (z-a)(z+\overline{a})$. Cette fonction est réelle sur la droite $i\mathbb{R}$. En particulier, $\Re f'/f = 0$ sur $i\mathbb{R}$. Ensuite, $f(0) = -|a|^2$, et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta = \int_{0}^{2\pi} \log |e^{i\theta} - a| d\theta. \tag{19}$$

Cette dernière intégrale est la partie réelle de

$$\int_{|a|\mathbb{S}^1} \log_0 (1-z) \frac{dz}{iz} = \log_0 1 = 0. \tag{20}$$

On en déduit finalement que pour une fonction f qui est holomorphe dans le demi-disque, continue au le bord, et ne s'annule pas sur le bord, si les a_i sont les zéros de f comptés avec multiplicité,

$$\pi \log |f(0)| + 2\pi \sum \log \frac{1}{|a_i|} = \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta + \int_{-1}^{1} \log t \Re \frac{f'}{f}(it) dt. \tag{21}$$

Exercice 4

1. * Pour cette question, on applique la formule de Jensen à un disque de rayon $1-\epsilon$. Comme f est bornée, le $\log |f|$ est majoré, et on trouve que

$$\sum \log \frac{1}{|z_n|} < \infty, \tag{22}$$

ce qui est équivalent.

2. On considère le produit $f = \prod mu_{z_n}$ où $\mu_{z_n}(z) = -(\overline{z_n}/|z_n|)(z-z_n)/(1-\overline{z_n}z)$. Alors, en notant $a_n = |z_n|$ et $u_n = z_n/|z_n|$,

$$|\mu_{z_n}(z) - 1| \leq (1-a_n) \frac{|1+\overline{u_n}z|}{|1-za\overline{u_n}|}. \tag{23}$$

Quand z reste dans un compact de $\mathbb{D}$, ceci est $\mathcal{O}(1-a_n)$, ce qui montre que le produit converge uniformément sur les compacts du disque, et il s'annule exactement en les z_n.

3. D'après les calculs effectués pour la question précédente, le produit converge aussi sur $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. En fait il converge en tout point qui n'est pas un point d'accumulation des z_n. La fonction f se prolonge donc de façon holomorphe à la plus grande composante connexe de l'ouvert de $\mathbb{C}$ obtenu en enlevant les points d'accumulation de la suite (z_n).
4. Il suffit de construire comme produit de Weierstrass une fonction dont les zéros tous les x_n, où (x_n) est une suite d'élément de U telle que tout point de ∂U est point d'accumulation de (x_n). On conclut ensuite avec le principe des zéros isolés.

Exercice 5 Soit f une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{D}$, avec $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Soit $M = \sup_{\mathbb{D}} |f|$. Soit $u \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$.

1. Il suffit d'observer que $1 - f(z)/u$ ne s'annule pas sur le disque.
2. ** On utilise la formule de Plancherel pour les fonctions continues 2π-périodiques :

$$g_r : \theta \mapsto g\left(re^{i\theta}\right)$$

où $0 \leq r < 1$, obtenant :

$$\sum_{n \geq 0} \left| \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| g\left(re^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta \leq 1 + \frac{M}{|u|}.$$

En faisant tendre r vers 1 on a l'inégalité plus simple :

$$\sum_{n \geq 0} \left| \frac{g^n(0)}{n!} \right|^2 \leq 1 + \frac{M}{|u|}.$$

En outre, $g(0) = 1$ et $g'(0) = -f'(0)/(2u)$. Donc

$$1 + \frac{M}{|u|} \geq 1 + \frac{|f'(0)|^2}{4|u|^2}$$

et on tombe sur l'inégalité recherchée.

Exercice 6

1. Comme p n'a pas de zéros réels, si P est d'ordre $2n$, il a un inverse $Q : L^2 \to H^{2n}$ où H^{2n} est l'espace de Sobolev d'ordre $2n$ ($2n$ dérivées dans L^2).
2. On calcule avec la transformée de Fourier

$$R(\lambda)f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-x')} \frac{1}{p(\xi) - \lambda} f(x') dx' d\xi. \tag{24}$$

On trouve

$$K(x, x', \lambda) = \tilde{K}(x - x', \lambda) = \widehat{q_\lambda}(x' - x) \tag{25}$$

où $q_\lambda(\xi) = 1/(p(\xi) - \lambda)$. C'est une fraction rationnelle, donc on peut calculer sa transformée de Fourier à partir des zéros de $p - \lambda$. Quand ils sont tous simples, on trouve pour $u > 0$

$$\tilde{K}(u, \lambda) = \sum_{p(z)=\lambda,\ \Im z>0} \frac{e^{izu}}{p'(z)} \tag{26}$$

et pour $u < 0$,

$$\tilde{K}(u, \lambda) = \sum_{p(z)=\lambda,\ \Im z<0} \frac{e^{izu}}{p'(z)} \tag{27}$$

3. La question était mal posée...
On considère l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus p(\mathbb{R})$. On peut montrer les choses suivantes **1.** En écrivant la résolvante pour $\lambda \in U$ qui s'approche d'un point $\lambda_0 \in p(\mathbb{R})$ qui n'est pas une valeur critique de p sur $\mathbb{R}$, on voit qu'elle se prolonge de façon holomorphe sur un voisinage de λ_0. On se donne $\nu_0 > 0$.
En effet, si $\xi_1, \ldots, \xi_m$ sont les préimages réelles de λ_0, on trouve $\epsilon > 0$ tel que p restreint à $B(\xi_i, \epsilon)$ est une bijection pour $i = 1, \ldots, m$. On suppose aussi que ϵ est assez petit pour que si $\xi \in \mathbb{R} \setminus \cup_i B(\xi_i, \epsilon)$, $|p(\xi) - \lambda_0| > \nu_0$.
On va travailler avec $\lambda \in B(\lambda_0, \nu)$, avec $0 < \nu < \nu_0$ suffisemment petit pour que les solutions $p(\xi_i(\lambda)) = \lambda$, $\xi_i(\lambda) \in B(\xi_i, \epsilon)$ soient bien définies (elle dépendent de façon holomorphe de λ). On écrit alors

$$\tilde{K}(u, \lambda) = \sum_i \int_{\xi_i - \epsilon}^{\xi_i + \epsilon} \frac{e^{iu\xi}}{p(\xi) - p(\xi_i(\lambda))} d\xi + K_r \tag{28}$$

Le reste K_r correspond à l'intégrale sur $\mathbb{R} \setminus \cup_i [\xi_i - \epsilon, \xi_i + \epsilon]$, qui est une fonction holomorphe sur $B(\lambda_0, \nu)$. Si on complète chaque intégrale par l'intégrale de $e^{iu\xi}/(p(\xi) - \lambda)$ sur le demi-cercle dans $\{\Im z > 0\}$ qui rejoint $\xi_i - \epsilon$ à $\xi_i + \epsilon$, on peut appliquer une formule des résidus, et on trouve $2i\pi e^{iu\xi_i(\lambda)}/p'(\xi_i(\lambda))$. L'intégrale sur le segment pour $\Im\lambda > 0$ est donc la somme de cette contribution et de l'opposé de l'intégrale sur le demi-cercle. Ceci donne une façon de prolonger la résolvante qui est holomorphe dans le disque $B(\lambda_0, \nu)$.
2. Pour traiter les points critiques de p, on fait le calcul suivante. On se donne p tel que près de zéro, $p(z) = z^n + o(z^n)$. Autrement dit, dans le disque centré en 0 de rayon $\epsilon > 0$, on demande que $|p(z) - z^n| \leq z^n/2$. On considère λ tel que $|\lambda| << \epsilon$, et

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{e^{iu\xi}}{p(\xi) - p(\lambda)} d\xi \tag{29}$$

On note $\xi_1, \ldots, \xi_n(\lambda)$ les solutions de $p(\xi) = p(\lambda)$. Elles sont toutes distinctes pour $\lambda \neq 0$, et pour λ assez petit, elles sont de la forme $e^{2ik\pi/n}\lambda + o(\lambda)$. On peut décomposer

$$\frac{1}{p(\xi) - p(\lambda)} = \sum_k \frac{1}{p'(\xi_k(\lambda))(\xi - \xi_k(\lambda))} + \text{ fonction holomorphe de } \xi \text{ et } \lambda \text{ pour } |\xi| \text{ et } |\lambda| \text{ assez petits.} \tag{30}$$

L'intégrale précédente se réécrit donc

$$\sum_k \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{e^{iu\xi}}{p'(\xi_k)(\xi - \xi_k)} d\xi + \text{ fonction holomorphe de } \lambda \text{ pour } |\lambda| \text{ assez petit} \tag{31}$$

On voudrait obtenir un prolongement méromorphe pour la fonction définie dans l'équation (29). Elle est déjà holomorphe sur l'ouvert $\{|\lambda| \leq \epsilon\} \cap \{p(\lambda) \notin p(\mathbb{R})\}$. On va donc prolonger depuis une composante connexe de celui-ci. On prend V, celle dont le bord intersecte $\mathbb{R}^+$, et qui est dans $\Im\lambda > 0$. Si n est pair, c'est presque un secteur d'angle $2\pi/n$. Si n est impair, c'est un presque un secteur d'angle π/n.
Dans $\Im\xi > 0$, si n est pair, il y a $n/2$ solutions ξ_k. Si n est impair, il y a en $\lceil n/2 \rceil$. Si on fait le calcul, on trouve que quand $\lambda \to 0$ dans V, l'expression dans (29) devient

$$\sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil} \omega_n^k \frac{e^{iu\lambda\omega_n^k}}{n\lambda^{n-1}} + \text{ fonction holomorphe de } \lambda. \tag{32}$$

où les ω_n^k sont les racine n-ième de l'unité usuelles.
3. D'après le calcul précédent, si $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ est une valeur critique pour p sur $\mathbb{R}$, si $\xi_1, \ldots, \xi_m$ sont les points critiques de p sur $\mathbb{R}$ où p vaut λ_0, on a montré que la résolvante $R(\lambda) = (p(-i\partial_x) - \lambda)^{-1}$ est une fonction méromorphe de la variable $(\lambda - \lambda_0)^{1/M}$ où M est le plus petit commun multiple des ordres de p au points ξ_i. Notons $k_1, \ldots, k_m$ les ordres en questions. On a précisémment montré qu'il y a des pôles d'ordre $k_i - 1$ dans les variables $\lambda^{1/k}$, autrement dit, si $k_1 = \max k_i$, le pôle est d'ordre $M(k_1 - 1)/k_1$.
4. Si $U = \mathbb{C} \setminus crit(p)$, on prend le revêtement universel $\widetilde{U}$ de U. La résolvante se prolonge de façon holomorphe sur $\widetilde{U}$.