Td n° 4 d'EDP

Opérateurs pseudo-différentiels

Séance du 24 octobre 2014

Exercice 1. *Inégalité de Garding raffinée*

Soit $m \geq 0$ et $a \in S^m$. On suppose qu'il existe C, R telles que pour $|\xi| \geq R$

$$Re(a(x,\xi)) \geq C|\xi|^m.$$

Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe des constantes A_N, B_N telles que

$$Re(Op(a)u,u) \geq A_N \|u\|^2_{H^{\frac{m}{2}}} - B_N \|u\|^2_{H^{-N}}.$$

⋆

Exercice 2. *Condition d'hypoellipticité d'Hörmander*

Soit $P = Op(p)$ un opérateur pseudo-différentiel tel que $p = p_0 + p_1$ avec $p_1 \in S^1$ et $p_0 \in S^0$. On suppose qu'il existe $c > 0$ telle que

$$i\{p_1, \bar{p_1}\} > c(1+|\xi|).$$

1. Vérifier que pour $p \in C^1(\mathbb{R}^n)$ à valeur dans $\mathbb{C}$ on a $i\{p,\bar{p}\} \in \mathbb{R}$.
2. Soit $Q = P^*P - PP^*$. Montrer que

$$\|Pu\|^2_{L^2} \geq (Qu,u).$$

3. Montrer que $Q = Op(q)$ avec $q = \frac{1}{i}\{\bar{p_1}, p_1\} + q_0$ et $q_0 \in S^0$.
4. En déduire qu'il existe C telle que

$$\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq C\|Pu\|_{L^2} + C\|u\|_{L^2}.$$

⋆

Exercice 3. *Somme assymptotique de symboles*

Soit m_j une suite strictement décroissante telle que $m_j \longrightarrow -\infty$ et $a_j \in S^{m_j}$. Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi = 1$ au voisinage de 0.

1. Montrer qu'il existe une suite $\varepsilon_j \longrightarrow 0$ telle que, si on pose $\widetilde{a_j} = (1-\chi(\varepsilon_j\xi))a_j$, on ait

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \widetilde{a_j}| \leq \frac{1}{2^j}(1+|\xi|)^{1+m_j-|\beta|}.$$

2. On pose $a = \sum_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{a_j}$. Montrer que cela définit bien une fonction C^∞.
3. Montrer que $a - \sum_{j<k} a_j \in S^{m_k}$.

⋆

Exercice 4. *Inversion des opérateurs elliptiques*

Soit $a \in S^m$.

1. Soit $b, b' \in S^{-m}$ tels que $Op(a)Op(b) - Id \in Op(S^{-\infty})$ et $Op(b')Op(a) - Id \in Op(S^{-\infty})$. Montrer que $Op(b) - Op(b') \in Op(S^{-\infty})$.

2. On suppose qu'il existe $b \in S^{-m}$ tel que $Op(a)Op(b) - Id \in Op(S^{-\infty})$. Montrer qu'il existe C, R tels que

$$\forall |\xi| \geq R, \quad |a(x,\xi)| \geq C|\xi|^m. \tag{1}$$

3. On suppose que a vérifie (1). Soit $F \in C^\infty(\mathbb{C})$ telle que $F(z) = \frac{1}{z}$ pour $|z| \geq C'$. On pose

$$b(x,\xi) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}} F(a(1+|\xi|^2)^{-\frac{m}{2}}).$$

Montrer que $b \in S^{-m}$ et qu'on peut écrire $Op(a)Op(b) = Id - R$ avec $R \in Op(S^{-1})$.

4. Construire $B \in Op(S^{-m})$ tel que

$$Op(a)B - Id \in Op(S^{-\infty}).$$

Construire de même un inverse à gauche.

Indication : On pourra utiliser l'exercice 3.

$\star$

Exercice 5. *Opérateur locaux*

Soit P un opérateur pseudo-différentiel local, c'est à dire que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $supp(Pu) \subset supp(u)$.

1. Supposons P d'ordre $m < -\frac{n}{2}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{S}$. Montrer qu'il existe une suite $u_k \in \mathcal{S}$ telle que $u_k \longrightarrow u$ in L^2 et $u_k = 0$ au voisinage de 0. En déduire $Pu(x_0) = 0$.

2. Supposons P d'ordre $m < 0$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $P^k = 0$. En déduire que $P = 0$.

Supposons P d'ordre $m < k \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que pour tout x_0, la distribution $u \mapsto Pu(x_0)$ est une combinaison linéaire finie de $\delta^{(i)}$.

4. Soient $f_1, .., f_k \in C^\infty$. Montrer que $Adf_1 ... Adf_k P = 0$, où $(AdA)B = [A, B]$.

5. En déduire que $P = \sum_{|\alpha| \leq k-1} a_\alpha(x) D^\alpha$, avec $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$\star$