4 Martingales (convergence p.s.)

Exercice 4.1 (Une preuve de la loi du 0-1 de Kolmogorov par la théorie des martingales)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On définit:

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n), \;\; \mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\right)$$

$$\mathcal{F}^n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots), \;\; \mathcal{F}^\infty = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}^n.$$

Soit $A \in \mathcal{F}^\infty$. Montrer, en utilisant la martingale $(M_n, n \geq 1)$ définie par $M_n = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n]$ pour $n \geq 1$, que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 4.2 (Théorème de Rademacher[1])**.** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \qquad et \qquad Z_n = 2^n \left(f\left(X_n + 2^{-n}\right) - f(X_n) \right).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes:

$$\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma(X)\,.$$

2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$ pour tout $n \geq 0$).

3. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, limite p.s. et dans L^1 de $(Z_n)_{n\geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne et bornée telle que $Z = g(X)$.

4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que p.s.:

$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u)du\,.$$

5. Conclure que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)du$.

Exercice 4.3. 1. Trouvez un exemple de martingale qui n'est pas bornée dans $\mathbb{L}^1$.

2. Trouvez un exemple de martingale qui converge p.s. mais n'est pas bornée dans $\mathbb{L}^1$.

3. Trouvez un exemple de martingale qui converge p.s. vers $+\infty$.

Exercice 4.4 (L'urne de Polya)**.** A l'instant 1, une urne contient a boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule et on la remplace par deux boules de la même couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 2. On répète ce procédé.

Pour $n \geq 1$, on note Y_n et $X_n = \frac{Y_n}{N_0+n-1}$ respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

[1] Dans cet exercice, on montre par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée.

1. Donner $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1 | \mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n | \mathcal{F}_n)$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire, que l'on note U, et montrer que pour tout $k \geq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n^k) = \mathbb{E}(U^k)$.

2. *Cas $a = b = 1$:* Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, Y_n suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n+1\}$. En déduire la loi de U.

3. *Cas général:* On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$:

$$Z_n \;=\; \frac{Y_n(Y_n+1)\dots(Y_n+k-1)}{(n+N_0-1)(n+N_0)\dots(n+N_0+k-2)}\,.$$

   Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(U^k)$.

4. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ (on exhibera le développement en série entière). En déduire qu'on a caractérisé la loi de U.

Exercice 4.5 (LFGN)**.** 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}(X_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et vérifiant:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} \;<\; \infty\,.$$

   On pose, pour $n \geq 1$,

$$M_n \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{j} \qquad et \qquad S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j\,.$$

   Montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement quand n tend vers $+\infty$. En déduire

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s}} 0\,.$$

2. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X. On définit pour $n \geq 1$:

$$Y_n \;=\; X_n \mathbb{1}_{\{|X_n|\leq n\}}\,.$$

   Montrer que :

   - $\mathbb{E}(Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(X)$
   - $\mathbb{P}\left(\exists n \geq 1 : \forall k \geq n, X_k = Y_k\right) = 1$
   - $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} < \infty$.

3. En déduire la loi forte des grands nombres.

Correction :

1. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$: pour tout $n \geq 1$, M_n est bien $\mathcal{F}_n$-mesurable. De plus $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes donc

$$\mathbb{E}(M_n^2) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{Var}(X_j)}{j^2} \;\leq\; \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(X_j)}{j^2}\,.$$

Ainsi, chaque v.a. M_n est intégrable et la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $\mathbb{L}^2$. Finalement on vérifie facilement que $\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n$. Ainsi, $(M_n)_{n\geq 1}$ est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$. Elle converge donc p.s. (et dans $\mathbb{L}^1$...). Notons M sa limite. Pour $n \geq 1$, on a (en posant $M_0 = 0$)

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j(M_j - M_{j-1}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} jM_j - \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)M_j\right) = M_n - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} M_j.$$

D'après le théorème de Cesaro,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} M_j \;\xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}}\; M\,,$$

donc $n^{-1}S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} 0$.

2. • On remarque que $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{|X|\leq n\}})$. Or $|X\mathbb{1}_{\{|X|\leq n\}}| \leq |X|$, et

$$X\mathbb{1}_{\{|X|\leq n\}} \;\xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}}\; X\,,$$

donc d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\mathbb{E}(Y_n) \;\xrightarrow[n\to\infty]{}\; \mathbb{E}(X)\,.$$

• Pour tout $n \geq 1$, posons $A_n = \{X_n \neq Y_n\}$. On a $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(|X_n| > n) = \mathbb{P}(|X| > n)$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| > n) \;\leq\; \int_0^{\infty} \mathbb{P}(|X| > t)dt \;=\; \mathbb{E}(|X|) \;<\; \infty\,,$$

donc d'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n A_n\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \;=\; 0$$

c'est à dire $\mathbb{P}\left(\exists n \geq 1 : \forall k \geq n, X_k = Y_k\right) = 1$.

• Enfin, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n^2)}{n^2} \;&=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\frac{|X|^2}{n^2}\mathbb{1}_{\{|X|\leq n\}}\right) \;=\; \mathbb{E}\left(|X|^2 \sum_{n\geq 1\vee|X|} \frac{1}{n^2}\right)\\ &\leq\; 2\mathbb{E}\left(|X|^2 \sum_{n\geq 1\vee|X|}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) \;\leq\; 2\mathbb{E}(|X|)\,.\end{aligned}$$

3. On se place dans le cadre de la question 2. Posons, pour tout $n \geq 1$, $Z_n = Y_n - \mathbb{E}(Y_n)$. La suite de v.a. $(Z_n)_{n\geq 1}$ vérifie alors les hypothèses de la question 1., donc

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$$

c'est à dire

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \mathbb{E}(Y_j)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0\,.$$

Or $\mathbb{E}(Y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X)$, donc le théorème de Cesaro implique que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(Y_j) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X)$$

et ainsi

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}(X)\,.$$

De plus, p.s., il existe $j_0 \geq 1$ tel que pour tout $j \geq j_0$, $Y_j = X_j$, donc p.s.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j_0-1} X_j + \frac{1}{n}\sum_{j\geq j_0} Y_j \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}(X)\,,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la loi forte des grands nombres. Une autre démonstration de ce théorème par des martingales se trouve à la fin du chapitre 12 du poly de J.-F. Le Gall.