# 4 Martingales (convergence p.s.)

**Exercice 4.1** (Une preuve de la loi du 0-1 de Kolmogorov par la théorie des martingales)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On définit:

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n), \;\; \mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\right)$$

$$\mathcal{F}^n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots), \;\; \mathcal{F}^\infty = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}^n.$$

Soit $A \in \mathcal{F}^\infty$. Montrer, en utilisant la martingale $(M_n, n \geq 1)$ définie par $M_n = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n]$ pour $n \geq 1$, que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

**Correction :** On vérifie facilement que $(M_n)$ est bien une martingale: pour tout $n$, $M_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable par définition de l'espérance conditionnelle, $M_n$ est intégrable car borné par 1, et

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) \;=\; M_n$$

car $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. C'est une martingale fermée, i.e., $M_n = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$ pour une variable aléatoire $Z$ intégrable (ici $Z = \mathbb{1}_A$) - ce qui est équivalent au fait d'être uniformément intégrable -, donc elle converge p.s. et dans $L^1$ vers $M_\infty = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_\infty)$. D'une part $\mathcal{F}^\infty \subset \mathcal{F}_\infty$ donc $M_\infty = \mathbb{1}_A$ p.s., d'autre part pour tout $n$, $\mathcal{F}_n$ est indépendante de $\mathcal{F}^\infty$ donc $M_n = \mathbb{P}(A)$ p.s., donc on obtient

$$\mathbb{1}_A \;=\; \mathbb{P}(A) \qquad p.s.,$$

ce qui signifie que $\mathbb{P}(A)$ vaut 0 ou 1.

**Exercice 4.2** (Théorème de Rademacher[1])**.** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $X$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \qquad et \qquad Z_n = 2^n \left( f\left(X_n + 2^{-n}\right) - f(X_n)\right).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes:

$$\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma(X)\,.$$

2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$ pour tout $n \geq 0$).

3. Montrer qu'il existe une variable aléatoire $Z$, limite p.s. et dans $L^1$ de $(Z_n)_{n\geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne et bornée telle que $Z = g(X)$.

[1]Dans cet exercice, on montre par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée.

4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que p.s.:
$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)du\,.$$
5. Conclure que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)du$.

**Correction :**

1. On remarque que, pour $0 \le k \le n$, $X_k = 2^{-k}\lfloor 2^k X_n \rfloor$. On peut l'écrire très proprement, ou faire un dessin pour s'en convaincre... Ainsi, pour $0 \le k \le n$, $X_k$ est $\sigma(X_n)$-mesurable. On en déduit que $\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n)$.

   De plus, pour tout $n \ge 0$, par définition de $X_n$, on sait que $X_n$ est $\sigma(X)$-mesurable. Ainsi, on a l'inclusion
$$\bigcap_{n\ge 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) \subset \sigma(X)\,.$$
   De plus, $X_n$ converge p.s. vers $X$ quand $n$ tend vers l'infini, donc $X$ est $\cap_n \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$-mesurable. Ainsi, on obtient l'inclusion réciproque
$$\sigma(X) \subset \bigcap_{n\ge 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

2. Soit $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable continue. Alors $h$ est bornée sur $[0,1]$ donc pour tout $n$, $h(X_n)$ est intégrable. On a, pour $n \ge 0$ et $0 \le k \le 2^n - 1$,
$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(h(X_{n+1})\mathbb{1}_{\{X_n = k2^{-n}\}}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(h\left(k2^{-n}\right)\mathbb{1}_{\{X\in[k2^{-n},(2k+1)2^{-(n+1)}]\}}\right)\\
&\qquad + \mathbb{E}\left(h\left((2k+1)2^{-(n+1)}\right)\mathbb{1}_{\{X\in[(2k+1)2^{-(n+1)},(k+1)2^{-n}]\}}\right)\\
&= 2^{-(n+1)}h\left(k2^{-n}\right) + 2^{-(n+1)}h\left((2k+1)2^{-(n+1)}\right).
\end{aligned}$$
   On en déduit que
$$\mathbb{E}(h(X_{n+1}) \mid X_n) = \frac{h(X_n)}{2} + \frac{h\left(X_n + 2^{-(n+1)}\right)}{2}.$$
   **Remarque**: en fait ici $X_{n+1}$ est lui aussi à valeurs discrètes, donc on peut aussi utiliser l'égalité:
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(X_{n+1})|X_n) &= \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} \mathbb{E}(h(X_{n+1})\mathbb{1}_{X_{n+1}=l2^{-(n+1)}}|X_n)\\
&= \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} h(l2^{-(n+1)})\mathbb{P}(X_{n+1} = l2^{-(n+1)}|X_n)
\end{aligned}$$

pour se ramener a étudier uniquement les probabilités de la forme

$$\mathbb{P}(X_n = k2^{-n} \ et \ X_{n+1} = l2^{-(n+1)})$$

avec $0 \leq l \leq 2^{n+1} - 1$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$.

Pour tout $n \geq 0$, $Z_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $|Z_n| \leq L$ donc $Z_n$ est intégrable et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= 2^{n+1}\mathbb{E}\left[f(X_{n+1} + 2^{-(n+1)}) - f(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= 2^n \left[f(X_n + 2^{-(n+1)}) - f(X_n) + f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n + 2^{-(n+1)})\right] \\
&= Z_n \, ,
\end{aligned}$$

donc $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale bornée par $L$.

3. D'après la question 2., $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(|Z_n|) \leq L$, donc $(Z_n)_{n\geq 0}$ converge p.s. (c'est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^1$). On note $Z$ sa limite. De plus, $|Z_n| \leq L$ p.s. pour tout $n \geq 0$. On peut donc utiliser le théorème de convergence dominée pour obtenir la convergence de $(Z_n)_{n\geq 0}$ vers $Z$ dans $L^1$. Pour tout $n \geq 0$, $Z_n$ est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ donc $Z$ est mesurable par rapport à la tribu $\bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$. D'après la question 1., $Z$ est ainsi $\sigma(X)$-mesurable. Il existe donc une fonction $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne telle que $Z = g(X)$. De plus, $Z$ étant bornée par $L$, on peut choisir $g$ bornée (en prenant $g \wedge L$ par exemple).

4. Soit $h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. La variable $h(X)$ est donc intégrable. On a, pour $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$\mathbb{E}\left(h(X)\mathbb{1}_{\{X_n = k2^{-n}\}}\right) = \mathbb{E}\left(h(X)\mathbb{1}_{\{X\in[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[\}}\right) = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} h(x)dx$$

et on en déduit que

$$\mathbb{E}(h(X) \mid X_n) = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} h(x)dx \, .$$

$(Z_n, n \geq 0)$ étant une $\mathcal{F}_n$-martingale convergeant p.s. et dans $L^1$ vers $Z$, on sait que $Z_n = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$ pour tout $n \geq 0$. On a donc p.s.

$$Z_n = \mathbb{E}(g(X)|X_n) = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u)du \, .$$

5. D'après la question 4., pour tout $n \geq 0$,

$$f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n) = \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u)du \, .$$

Donc, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n}) = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} g(u)du$$

puis, en sommant, pour tout $0 \leq k \leq 2^n$,

$$f(k2^{-n}) \;=\; f(0) + \int_0^{k2^{-n}} g(u)du\,.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(\lfloor x2^n \rfloor 2^{-n}) \;=\; f(0) + \int_0^{\lfloor x2^n \rfloor 2^{-n}} g(u)du$$

et en faisant tendre $n$ vers l'infini, par continuité de $f$ on obtient

$$f(x) \;=\; f(0) + \int_0^x g(u)du\,.$$

**Exercice 4.3.** 1. Trouvez un exemple de martingale qui n'est pas bornée dans $\mathbb{L}^1$.

2. Trouvez un exemple de martingale qui converge p.s. mais n'est pas bornée dans $\mathbb{L}^1$.

3. Trouvez un exemple de martingale qui converge p.s. vers $+\infty$.

**Correction :**

1. La marche aléatoire simple de l'exercice 1 est un exemple. D'après le théorème central limite $\mathbb{P}(S_n \geq \sqrt{n}) \sim \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \geq 1)$ d'où $\mathbb{E}[|S_n|] \geq \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \geq 1)\sqrt{n}$ asymptotiquement.

2. L'idée est de modifier la marche $(S_n)$ et la stopper à partir d'un certain rang (mais probablement grand). Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distributées telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Soit $T$ une variable aléatoire indépendante des $(X_i)$ telle que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(T = n) \sim cn^{3/2}$ pour une constante $c > 0$ (pourquoi est-ce possible ?). On considère la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(T, X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $\mathcal{F}_0 = \sigma(T)$. Alors

$$\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n\wedge T} X_i$$

est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$. Intuitivement $\tilde{S}$ est une marche aléatoire simple, jusqu'au jour ou quelqu'un d'extérieur (la variable $T$) lui dit d'arrêter sa marche et de ne plus bouger. De plus

$$\mathbb{E}[|\tilde{S}_n|] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T = k)\mathbb{E}[|S_k|] \geq \sum_{k=1}^{n} c' \frac{\sqrt{n}}{n^{3/2}},$$

pour une bonne constante $c' > 0$. Puisque la série harmonique diverge la martingale $(\tilde{S}_n)$ n'est pas bornée dans $\mathbb{L}^1$. Il est évident qu'elle converge presque sûrement car $\tilde{S}_n = \tilde{S}_T$ pour tout $n \geq T$.

3. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère $(\xi_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(\xi_n = -n^2) = \frac{1}{n^2} \;\text{ et }\; \mathbb{P}\left(\xi_n = \frac{n^2}{n^2-1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

On pose $M_n = \xi_2 + \ldots + \xi_n$ pour $n \geq 2$. Montrons que $(M_n)_{n\geq 2}$ est une martingale telle que $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} +\infty$. On pose pour $n \geq 2$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_2, \ldots, \xi_n)$. Pour tout $n \geq 2$, $M_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable, bornée donc intégrable et $\xi_{n+1}$ étant indépendante de $\mathcal{F}_n$, on a

$$\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\xi_{n+1}) + M_n = -\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} + \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2-1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + M_n = M_n.$$

$(M_n)_{n\geq 2}$ est donc une martingale.

Pour tout $n \geq 2$, posons $A_n = \{\xi_n = -n^2\}$. On a

$$\sum_{n\geq 2} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Donc, d'après le lemme de Borel-Cantelli, on obtient

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) \ = \ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq 2}\bigcup_{n\geq k} A_n\right) \ = \ 0\,.$$

Cela signifie que $\mathbb{P}$ p.s., il existe $n_0(\omega)$ tel que pour tout $n \geq n_0(\omega)$, l'événement $A_n^c$ se produit, et $M_{n+1} \geq M_n + 1$. On en déduit que

$$M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} +\infty\,.$$

**Exercice 4.4** (L'urne de Polya)**.** A l'instant 1, une urne contient $a$ boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule et on la remplace par deux boules de la même couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 2. On répète ce procédé.

Pour $n \geq 1$, on note $Y_n$ et $X_n = \frac{Y_n}{N_0+n-1}$ respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant $n$. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

1. Donner $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1|\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n|\mathcal{F}_n)$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire, que l'on note $U$, et montrer que pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n^k) = \mathbb{E}(U^k)$.

2. *Cas $a = b = 1$:* Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $Y_n$ suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n+1\}$. En déduire la loi de $U$.

3. *Cas général:* On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$:

$$Z_n \ = \ \frac{Y_n(Y_n+1)\ldots(Y_n+k-1)}{(n+N_0-1)(n+N_0)\ldots(n+N_0+k-2)}\,.$$

   Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(U^k)$.

4. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ (on exhibera le développement en série entière). En déduire qu'on a caractérisé la loi de $U$.

**Correction :**

1. On a

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1|\mathcal{F}_n) \;=\; \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\text{la } n^{ieme} \text{ boule tirée est blanche}\}}|\mathcal{F}_n) \;=\; X_n$$

   et de même

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n|\mathcal{F}_n) \;=\; 1 - X_n\,.$$

   Pour tout $n \geq 1$, $X_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $X_n \in [0,1]$ donc est intégrable et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{Y_n+1}{N_0+n}\mathbb{1}_{\{Y_{n+1}=Y_n+1\}}|\mathcal{F}_n\right) + \mathbb{E}\left(\frac{Y_n}{N_0+n}\mathbb{1}_{\{Y_{n+1}=Y_n\}}|\mathcal{F}_n\right)\\
&= \frac{Y_n+1}{N_0+n}\mathbb{P}\left(Y_{n+1}=Y_n+1|\mathcal{F}_n\right) + \frac{Y_n}{N_0+n}\mathbb{P}\left(Y_{n+1}=Y_n|\mathcal{F}_n\right)\\
&= \frac{Y_n+1}{N_0+n}X_n + \frac{Y_n}{N_0+n}(1-X_n) = \frac{X_n+Y_n}{N_0+n} = X_n\,,
\end{aligned}$$

   donc $(X_n, n \geq 0)$ est une martingale. Étant positive (ou bornée dans $L^1$, les deux arguments fonctionnent), elle converge p.s. vers une v.a. $U$. De plus, $(X_n, n \geq 1)$ est à valeurs dans $[0,1]$ donc d'après le théorème de convergence dominée, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{E}(X_n^k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(U^k).$$

2. On a immédiatement l'initialisation de la récurrence pour $n = 1$. Supposons que pour un $n \geq 2$ on sait que la loi de $Y_{n-1}$ est la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$. Soit $k \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y_n = k] &= \mathbb{P}[Y_n = k \textit{ et } Y_{n-1} = k] + \mathbb{P}[Y_n = k \textit{ et } Y_{n-1} = k-1]\\
&= \mathbb{P}[Y_n = k|Y_{n-1} = k]\mathbb{P}[Y_{n-1} = k] + \mathbb{P}[Y_n = k|Y_{n-1} = k-1]\mathbb{P}[Y_{n-1} = k-1]\\
&= \frac{\mathbb{P}[\{la\ n-ieme\ boule\ prise\ est\ rouge\}|Y_{n-1}=k]}{n}\\
&\quad + \frac{\mathbb{P}[\{la\ n-ieme\ boule\ prise\ est\ blanche\}|Y_{n-1}=k-1]}{n}\\
&= \frac{1}{n}\frac{n+1-k}{n+1} + \frac{1}{n}\frac{k-1}{n+1}\\
&= \frac{1}{n+1}\,.
\end{aligned}$$

   D'autre part

$$\mathbb{P}[Y_n = 1] \;=\; \mathbb{P}[\{les\ n\ 1eres\ boules\ prises\ sont\ rouges\}] \;=\; \frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{n}{n+1} \;=\; \frac{1}{n+1}\,.$$

   On en déduit que $Y_n$ suit bien une loi uniforme sur $\{1, ..., n+1\}$.

   Il en découle que pour tout $n$, $X_n$ suit une loi uniforme sur $\{1/(n+1), 2/(n+1), ..., (n+1)/(n+1)\}$. Or $(X_n)$ converge p.s. donc en loi vers $U$, donc $U$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$ (limite des lois uniformes sur $\{1/(n+1), 2/(n+1), ..., (n+1)/(n+1)\}$ quand $n$ tend vers l'infini).

3. Pour tout $n \geq 1$, $Z_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $Z_n \in [0,1]$ donc est intégrable et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{(Y_n+1)\dots(Y_n+k)}{(n+N_0)(n+N_0+1)\dots(n+N_0+k-1)}\mathbb{1}_{\{Y_{n+1}=Y_n+1\}} \mid \mathcal{F}_n\right) \\
&\quad + \mathbb{E}\left(\frac{Y_n(Y_n+1)\dots(Y_n+k-1)}{(n+N_0)(n+N_0+1)\dots(n+N_0+k-1)}\mathbb{1}_{\{Y_{n+1}=Y_n\}} \mid \mathcal{F}_n\right) \\
&= \frac{(Y_n+1)\dots(Y_n+k)}{(n+N_0)(n+N_0+1)\dots(n+N_0+k-1)}\mathbb{P}(Y_{n+1}=Y_n+1 \mid \mathcal{F}_n) \\
&\quad + \frac{Y_n(Y_n+1)\dots(Y_n+k-1)}{(n+N_0)(n+N_0+1)\dots(n+N_0+k-1)}\mathbb{P}(Y_{n+1}=Y_n \mid \mathcal{F}_n) \\
&= \frac{(Y_n+1)\dots(Y_n+k-1)}{(n+N_0)(n+N_0+1)\dots(n+N_0+k-1)}\left((Y_n+k)X_n + Y_n(1-X_n)\right) \\
&= \frac{(Y_n+1)\dots(Y_n+k-1)}{(n+N_0)(n+N_0+1)\dots(n+N_0+k-1)}\left(X_n(k+N_0+n-1)\right) = Z_n\,,
\end{aligned}$$

donc $(Z_n, n \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale. En particulier, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(Z_1) = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{N_0(N_0+1)\cdots(N_0+k-1)}\,,$$

car $Y_1 = a$ (il y a $a$ boules blanches à l'instant initial). De plus, $\mathbb{E}(Z_n)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{Y_n^k + P_1(Y_n)}{n^k + P_2(n)}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{Y_n^k}{n^k}\right)\frac{n^k}{n^k+P_2(n)} + \mathbb{E}\left(\frac{P_1(Y_n)}{n^k+P_2(n)}\right)\,,
\end{aligned}$$

où $P_1$ et $P_2$ sont des polynômes de degré $\leq k-1$. Puisque nous avons montré en 1. que $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_n^k) = \mathbb{E}(U^k)$, on en déduit que $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(U^k)$, d'où pour tout $k \geq 1$

$$\mathbb{E}(U^k) = \mathbb{E}(Z_1) = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{N_0(N_0+1)\cdots(N_0+k-1)}\,.$$

4. Soit $X$ une v.a. réelle bornée (on note $C \geq 0$ une constante telle que $|X| \leq C$ p.s.). Soit $\phi_X$ la fonction caractéristique de $X$, i.e., pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \mathbb{E}(\exp(itX))$. On a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(\sum_{n\geq 0}\frac{(itX)^n}{n!}).$$

Or on a

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(itX)^n}{n!} \xrightarrow[N\to\infty]{\text{p.s.}} \sum_{n\geq 0}\frac{(itX)^n}{n!}$$

et cette convergence est dominée par la constante $e^{|t|C}$. Donc par le théorème de convergence dominée on obtient

$$\phi_X(t) = \sum_{n\geq 0}\frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}(X^n)\,.$$

$U$ étant à valeurs dans $[0,1]$, sa fonction caractéristique $\phi_U$ se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ comme décrit dans la question 3. Les moments de U, $(\mathbb{E}(U^k))_{k\geq 1}$, décrivent donc complètement la fonction caractéristique de $U$, qui elle même caractérise la loi de $U$.

**Exercice 4.5** (LFGN)**.**

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{E}(X_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et vérifiant:
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} < \infty\,.$$
On pose, pour $n \geq 1$,
$$M_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{j} \qquad et \qquad S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j\,.$$
Montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement quand $n$ tend vers $+\infty$. En déduire
$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s}} 0\,.$$

2. Soit $X$ une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de même loi que $X$. On définit pour $n \geq 1$ :
$$Y_n = X_n \mathbb{1}_{\{|X_n|\leq n\}}\,.$$
Montrer que :
   - $\mathbb{E}(Y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X)$
   - $\mathbb{P}\left(\exists n \geq 1 : \forall k \geq n, X_k = Y_k\right) = 1$
   - $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} < \infty$.

3. En déduire la loi forte des grands nombres.

**Correction :**

1. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$: pour tout $n \geq 1$, $M_n$ est bien $\mathcal{F}_n$-mesurable. De plus $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes donc
$$\mathbb{E}(M_n^2) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{Var}(X_j)}{j^2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(X_j)}{j^2}\,.$$
Ainsi, chaque v.a. $M_n$ est intégrable et la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $\mathbb{L}^2$. Finalement on vérifie facilement que $\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n$. Ainsi, $(M_n)_{n\geq 1}$ est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$. Elle converge donc p.s. (et dans $\mathbb{L}^1$...). Notons $M$ sa limite. Pour $n \geq 1$, on a (en posant $M_0 = 0$)
$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j(M_j - M_{j-1}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} jM_j - \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)M_j\right) = M_n - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} M_j.$$

D'après le théorème de Cesaro,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} M_j \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} M\,,$$

donc $n^{-1}S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} 0$.

2. • On remarque que $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{|X|\le n\}})$. Or $|X\mathbb{1}_{\{|X|\le n\}}| \le |X|$, et

$$X\mathbb{1}_{\{|X|\le n\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X\,,$$

donc d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\mathbb{E}(Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(X)\,.$$

• Pour tout $n \ge 1$, posons $A_n = \{X_n \ne Y_n\}$. On a $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(|X_n| > n) = \mathbb{P}(|X| > n)$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X|>n) \le \int_0^{\infty}\mathbb{P}(|X|>t)dt = \mathbb{E}(|X|) < \infty\,,$$

donc d'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_n A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\ge 1}\bigcup_{k\ge n} A_k\right) = 0$$

c'est à dire $\mathbb{P}(\exists n \ge 1 : \forall k \ge n, X_k = Y_k) = 1$.

• Enfin, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}(Y_n^2)}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left(\frac{|X|^2}{n^2}\mathbb{1}_{\{|X|\le n\}}\right) = \mathbb{E}\left(|X|^2\sum_{n\ge 1\vee|X|}\frac{1}{n^2}\right)\\ &\le 2\mathbb{E}\left(|X|^2\sum_{n\ge 1\vee|X|}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right) \le 2\mathbb{E}(|X|)\,.\end{aligned}$$

3. On se place dans le cadre de la question 2. Posons, pour tout $n \ge 1$, $Z_n = Y_n - \mathbb{E}(Y_n)$. La suite de v.a. $(Z_n)_{n\ge 1}$ vérifie alors les hypothèses de la question 1., donc

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$$

c'est à dire

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \mathbb{E}(Y_j)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0\,.$$

Or $\mathbb{E}(Y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X)$, donc le théorème de Cesaro implique que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(Y_j) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(X)$$

et ainsi

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}(X)\,.$$

De plus, p.s., il existe $j_0 \geq 1$ tel que pour tout $j \geq j_0$, $Y_j = X_j$, donc p.s.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j_0-1} X_j + \frac{1}{n}\sum_{j\geq j_0} Y_j \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}(X)\,,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la loi forte des grands nombres. Une autre démonstration de ce théorème par des martingales se trouve à la fin du chapitre 12 du poly de J.-F. Le Gall.