École Normale Supérieure
24 octobre 2017

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n°5

Exercice 1 : compactification de Stone-Čech

Notons $\pi_f : E_X \to [0;1]$ la projection sur la coordonnée f.

On va utiliser à deux reprises dans cet exercice le fait qu'une application $\phi : X \to E_X$ est continue si et seulement si, pour toute $f \in \mathcal{F}_X$, l'application $\pi_f \circ \phi : X \to [0;1]$ est continue. Un sens est clair : une composée de fonctions continues est continue. L'autre sens peut se démontrer en revenant à la définition de la topologie produit.

1. Pour toute $f \in \mathcal{F}_X$, $\pi_f \circ \phi(x) = f(x)$ est une application continue puisque f est continue.

2. a) Pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $f : X \to [0;1]$ tel que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$ (puisqu'un espace normal possède la propriété d'Urysohn et puisque, comme l'espace est séparé, $\{x\}$ et $\{y\}$ sont fermés).
Pour cette fonction f, $\pi_f(\phi(x)) = 0 \neq 1 = \pi_f(\phi(y))$ donc $\phi(x) \neq \phi(y)$.
b) Soit $U \subset X$ un ouvert. Montrons que $\phi(U)$ est ouvert dans $\phi(X)$.
Soit $x \in U$ quelconque. Il faut montrer que $\phi(U)$ contient un voisinage ouvert de $\phi(x)$.
Soit $f : X \to [0;1]$ une fonction continue qui vaut 1 sur $X - U$ et 0 en x (une telle fonction existe car X est normal et $\{x\}, X - U$ sont deux fermés disjoints).
Posons $V = \pi_f^{-1}([0;1[)$. C'est un ouvert élémentaire de E_X.
L'ensemble $\phi(X) \cap V$ est donc un ouvert de $\phi(X)$. Il contient $\phi(x)$ car $\pi_f(\phi(x)) = f(x) = 0$. De plus, il est inclus dans $\phi(U)$. En effet, si $\phi(y) \in V$, $f(y) = \pi_f(\phi(y)) \neq 1$ donc $y \notin X - U$, par définition de f. Donc $y \in U$ et $\phi(y) \in \phi(U)$.
c) L'application $\phi : X \to \phi(X)$ est continue et bijective. De plus, elle est ouverte. C'est donc un homéomorphisme.

3. L'ensemble E_X est compact, par le théorème de Tychonov. Puisque Y_X est fermé dans E_X, cet ensemble est aussi compact.
Un ensemble est toujours dense dans son adhérence.

4. a) Notons toujours, pour toute $f \in \mathcal{F}_X$, $\pi_f : E_X \to [0;1]$ la projection sur la coordonnée f (qui est continue).
L'application h est continue puisque, pour tout $i \in I$, $p_i \circ h$ est continue (c'est la restriction à Y_X de l'application $\pi_{p_i \circ g}$, qui est continue).
De plus, pour tout $x \in X$, $h \circ \phi(x) = h(\{f(x)\}_{f \in \mathcal{F}_X}) = \{p_i \circ g(x)\}_{i \in I} = g(x)$.
b) On pose $Z' = [0;1]^I$. Puisque $g : X \to Z$ est continue et $Z \subset Z'$, on peut étendre g en une fonction $g' : X \to Z'$, qui est aussi continue.
Soit $h' : Y_X \to Z'$ continue telle que $h' \circ \phi = g'$. Elle existe d'après la question précédente.
Pour tout $y \in \phi(X)$, $h'(y) \in Z$. En effet, $y = \phi(x)$ pour un certain x et $h'(y) = h'(\phi(x)) = g'(x) = g(x)$. Donc, puisque h' est continue, $h'(Y_X) = h'(\overline{\phi(X)}) \subset \overline{h'(\phi(X))} \subset \overline{Z} = Z$. En effet, comme Z est un sous-ensemble compact de Z', il est fermé.

On peut donc restreindre h' en une application continue $h : Y_X \to Z$. Puisque $h' \circ \phi = g'$, $h \circ \phi = g$.
c) Un compact Z est toujours normal. Il est donc homéomorphe à un certain sous-ensemble Z' de $[0;1]^I$, d'après la question 2. Ce Z' est compact.
Soit $G : Z \to Z'$ un homéomorphisme.
Puique $G \circ g$ est une fonction continue, il existe, d'après la question précédente, $h' : Y_X \to Z'$ continue telle que $h' \circ \phi = G \circ g$. ALors $G^{-1} \circ h' : Y_X \to Z$ est continue et vérifie $h \circ \phi = g$.
d) Supposons que h et h' sont deux fonctions continues de Y_X vers Z telles que $g = h \circ \phi = h' \circ \phi$. Pour tout $x \in X$, $h(\phi(x)) = h'(\phi(x))$ donc $h = h'$ sur $\phi(X)$. L'ensemble $\{y \in Y_X \text{ tq } h(y) = h'(y)\}$ est un fermé (car h et h' sont continues et Z est séparé (car compact)). Il contient $\phi(X)$ donc il est égal à Y_X, puisque $\phi(X)$ est dense dans Y_X.
Les fonctions h et h' sont donc égales.

Exercice 2 : sur le théorème de Stone-Weierstrass

1. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Construisons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ demandée.
Pour tout n, on note $\mathcal{A}_n = \{g_{|K_n} \text{ tq } g \in \mathcal{A}\}$.
Pour tout n, $\mathcal{A}_n$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K_n, \mathbb{R})$ contenant les constantes et séparant les points. Elle est donc dense dans $\mathcal{C}(K_n, \mathbb{R})$. Soit $f_n \in \mathcal{A}$ telle que $||f_{n|K_n} - f_{|K_n}|| \leq \frac{1}{n+1}$.
Montrons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite converge vers f uniformément sur tout compact. Si $S \subset X$ est compact, alors $S \subset K_n$ pour tout n assez grand. En effet, les $\mathring{K}_n$ forment un recouvrement ouvert de S (car $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathring{K}_{n+1} \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathring{K}_n$). Puisque S est compact, on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini. Comme les $\mathring{K}_n$ sont emboîtés, cela revient à dire que $S \subset \mathring{K}_n$ pour tout n assez grand.
Donc, pour tout n assez grand, $||f_{n|S} - f_{|S}|| \leq ||f_{n|K_n} - f_{|K_n}|| \leq \frac{1}{n+1}$. Donc $||f_{n|S} - f_{|S}|| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

2. L'ensemble de ces fonctions est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$. Cette sous-algèbre contient les fonctions constantes.
Elle sépare les points. En effet, si $(y_i)_{i\in I}$ et $(z_i)_{i\in I}$ sont deux points différents, il existe $i_0 \in I$ tel que $y_{i_0} \neq z_{i_0}$. Comme X_{i_0} est compact, il est normal et vérifie donc le lemme d'Urysohn (voir les TD 2 et 3). Il existe alors $g : X_{i_0} \to \mathbb{R}$ continue telle que $g(y_{i_0}) = 0 \neq 1 = g(z_{i_0})$. La fonction $f : (x_i)_{i\in I} \to g(x_{i_0})$ appartient à $\mathcal{F}$ et sépare $(y_i)_i$ et $(z_i)_i$.
De plus, par le théorème de Tychonov, $\prod\limits_i X_i$ est compact.
Par le théorème de Stone-Weierstrass, $\mathcal{F}$ est donc dense dans $\mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$.

3. Soit $x_0 \in \Omega$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r) \subset \Omega$. Notons $\phi : [0;1] \to \Omega$ l'application telle que $\phi(t) = x_0 + re^{2\pi i t}$.
Pour tout $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \phi^k(t)\phi'(t)dt &= \frac{1}{k+1}\int_0^1 [\phi^{(k+1)}]'(t)dt \\ &= \frac{\phi^{(k+1)}(1) - \phi^{(k+1)}(0)}{k+1} = 0\end{aligned}$$

On en déduit que pour toute fonction polynomiale f, $\int_0^1 f(\phi(t))\phi'(t)dt = 0$.

Si l'ensemble des fonctions polynomiales de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{C}$ était dense dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$, toutes les fonctions continues de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{C}$ devraient vérifier :

$$\int_0^1 f(\phi(t))\phi'(t)dt = 0$$

Or ce n'est pas le cas. En effet, si on prend $f(z) = \overline{z}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(\phi(t))\phi'(t)dt &= \int_0^1 2\pi ir(x_0 e^{2\pi it} + r)dt \\ &= 2\pi ir^2 \neq 0\end{aligned}$$

4.

Lemme 2.1 *Pour toute $h \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, il existe un unique réel $c(h)$ tel que $h - c(h) \in \mathcal{A}$.*

Commençons pas l'unicité : si $h - c_1 \in \mathcal{A}$ et $h - c_2 \in \mathcal{A}$, alors $c_2 - c_1 = (h - c_1) - (h - c_2)$ appartient aussi à $\mathcal{A}$. La seule fonction constante dans $\mathcal{A}$ étant la fonction nulle, on doit avoir $c_2 - c_1 = 0$.
Montrons l'existence.
Posons $\mathcal{A}' = \{f + c \text{ tq } f \in \mathcal{A}, c \in \mathbb{R}\}$. On vérifie qu'il s'agit d'une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Cette sous-algèbre contient les constantes et sépare les points. Elle est donc dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Ainsi, pour toute fonction $h \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ et une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que :

$$||h - (f_n + c_n)||_\infty \to 0$$

La suite $(|c_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$. En effet, si elle tend vers $+\infty$, on a :

$$||f_n/c_n + (1 - h/c_n)||_\infty \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad ||f_n/c_n + 1||_\infty \to 0$$

Pour tout n, $f_n/c_n \in \mathcal{A}$ donc $1 \in \overline{\mathcal{A}}$. Comme on a supposé que $\mathcal{A}$ était fermée, cela implique que $1 \in \mathcal{A}$, ce qui est absurde.
Donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $c(h)$. Alors :

$$||h - c(h) - f_n||_\infty \to 0$$

et comme $\mathcal{A}$ est fermée, $h - c(h) \in \mathcal{A}$.

Lemme 2.2 *L'application $h \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \to c(h) \in \mathbb{R}$ est un morphisme d'algèbres.*

Soient $h_1, h_2 \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et $r \in \mathbb{R}$. Puisque $h_1 - c(h_1)$ appartient à $\mathcal{A}$, $rh_1 - rc(h_1)$ aussi. Comme $c(rh_1)$ est unique, $c(rh_1) = rc(h_1)$.
De même, $c(h_1 + h_2) = c(h_1) + c(h_2)$.
Enfin, puisque $h_1 - c(h_1)$ et $h_2 - c(h_2)$ appartiennent à $\mathcal{A}$, $(h_1 - c(h_1))(h_2 - c(h_2)) + c(h_1)(h_2 - c(h_2)) + c(h_2)(h_1 - c(h_1))$ aussi. Donc $h_1h_2 - c(h_1)c(h_2)$ appartient à $\mathcal{A}$ et $c(h_1h_2) = c(h_1)c(h_2)$.

Lemme 2.3 *Pour tout $h \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, $|c(h)| \leq ||h||_\infty$.*

Montrons d'abord qu'il existe $M > 0$ tel que $|c(h)| \leq M||h||_\infty$ pour toute $h \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
Si ce n'est pas le cas, on peut trouver une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions telles que $||h_n||_\infty \to 0$ et $c(h_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Avec cette définition, $1 - h_n \in \mathcal{A}$ pour tout n. Comme $\mathcal{A}$ est fermée, $1 \in \mathcal{A}$. C'est impossible.
Donc M existe bien.
Montrons maintenant que $M = 1$ convient. Si ce n'est pas le cas, il existe $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ telle que $|c(f)| > ||f||_\infty$. Alors :

$$\left|\frac{c(f^n)}{||f^n||_\infty}\right| = \left|\frac{c(f)}{||f||_\infty}\right|^n \to +\infty$$

ce qui est absurde car ce quotient doit rester inférieur à M.

Lemme 2.4 *Il n'existe pas dans $\mathcal{A}$ de fonction strictement positive.*

Soit $f \in \mathcal{A}$. Notons $m_1 = \min f$ et $m_2 = \max f$ (ces réels sont bien définis car la fonction f est continue et définie sur un compact).
Posons $h = f - \frac{m_1+m_2}{2}$. Le minimum de h est $\frac{m_1-m_2}{2}$ et son maximum est $\frac{m_2-m_1}{2}$ donc $||h||_\infty = \frac{m_2-m_1}{2}$.
Puisque $f \in \mathcal{A}$, $c(h) = -\frac{m_1+m_2}{2}$. D'après le lemme précédent :

$$\left|\frac{m_1+m_2}{2}\right| \leq \frac{m_2-m_1}{2}$$

donc $m_1 \leq 0$ et $m_2 \geq 0$, ce qui implique que f n'est pas strictement positive.
Utilisons le lemme précédent pour conclure.
Posons $F = \bigcap\limits_{f\in\mathcal{A}} f^{-1}(\{0\})$. Cet ensemble est une intersection de fermés du compact X. Il est non-vide car, s'il est vide, il existe $f_1, ..., f_n$ un nombre fini d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $f_1^{-1}(\{0\}) \cap ... \cap f_n^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. Dans ce cas, les fonctions f_k n'ont pas de zéro commun donc la fonction $g = f_1^2 + ... + f_n^2$ est un élément de $\mathcal{A}$ n'ayant que des valeurs strictement positives. C'est en contradiction avec le lemme précédent.
L'ensemble F ne peut contenir qu'un seul point, sinon $\mathcal{A}$ ne sépare pas les points de F (toutes les fonctions de $\mathcal{A}$ étant nulles sur F). Il existe donc un unique $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = 0$ pour toute $f \in \mathcal{A}$.
On a donc montré $\mathcal{A} \subset \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \text{ tq } f(x_0) = 0\}$.
De plus, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ telle que $f(x_0) = 0$, on doit avoir $c(f) = 0$. En effet, puisque $f - c(f) \in \mathcal{A}$, on doit avoir $(f - c(f))(x_0) = 0$ donc $c(f) = 0$. Ainsi, $f \in \mathcal{A}$.

Exercice 3 ✐✐ : théorème de Peano

1. Soit N tel que, si $|t - t'| \leq \epsilon/N$ et $|x - x'| \leq \epsilon M/N$, alors :

$$|f(t, x) - f(t', x')| \leq \delta$$

Un tel N existe car f est uniformément continue, d'après le théorème de Heine.
On définit X_δ sur $\left[0; \frac{k}{N}\epsilon\right]$ par récurrence sur k.

- Pour $k = 0$, on pose $X_\delta(0) = x_0$.

- Si X_δ est définie sur $\left[0; \frac{k}{N}\epsilon\right]$, on pose :

$$X_\delta(t) = X_\delta\left(\frac{k}{N}\epsilon\right) + \left(t - \frac{k}{N}\epsilon\right) f\left(\frac{k}{N}\epsilon, X_\delta\left(\frac{k}{N}\epsilon\right)\right) \qquad \forall t \in \left[\frac{k}{N}\epsilon; \frac{k+1}{N}\epsilon\right]$$

On peut montrer par récurrence que, pour tout $t \in \left[\frac{k}{N}\epsilon; \frac{k+1}{N}\epsilon\right]$:

$$|X_\delta(t) - x_0| \leq tM$$

En particulier, on a toujours $|X_\delta(t) - x_0| \leq R$ et donc la définition est valide.
La fonction est bien continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. De plus, pour tout k et tout $t \in \left[\frac{k}{N}\epsilon; \frac{k+1}{N}\epsilon\right]$:

$$\left|X_\delta(t) - X_\delta\left(\frac{k}{N}\epsilon\right)\right| \leq \frac{\epsilon}{N}M$$

Donc, si X_δ est dérivable en t :

$$|X_\delta'(t) - f(t, X_\delta(t))| = \left|f\left(\frac{k}{N}\epsilon, X_\delta\left(\frac{k}{N}\epsilon\right)\right) - f(t, X_\delta(t))\right| \leq \delta$$

2. Considérons $\{X_\delta\}_{0<\delta\leq 1} \subset \mathcal{C}^0([0;\epsilon], \mathbb{R}^n)$. Cette famille de fonctions est équicontinue.
En effet, pour tout $\delta \in]0;1]$, la dérivée de X_δ existe partout sauf en un nombre fini de points et, partout où elle existe, elle est inférieure à $M + \delta \leq M + 1$. Comme X_δ est de plus continue, on en déduit que X_δ est $(M+1)$-lipschitzienne.
La famille $\{X_\delta\}$ est de plus uniformément bornée (par R, puisque $(t, X_\delta(t))$ reste dans l'ensemble de définition de f) donc son image est d'adhérence compacte dans $\mathbb{R}$.
D'après le théorème d'Ascoli, cette famille est donc d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}^0([0;\epsilon], \mathbb{R}^n)$ et la suite $(X_{1/n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une sous-suite convergente au sens de la norme uniforme.
3. Pour tout t, $X(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} X_{\delta_n}(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^t X_{\delta_n}'(t)dt$.
Pour tout n, $\left|\int_0^t X_{\delta_n}'(t)dt - \int_0^t f(t, X_{\delta_n}(t))dt\right| \leq \delta_n t \leq \delta_n \epsilon$.
De plus, $t \to f(t, X_{\delta_n}(t))$ converge uniformément vers $t \to f(t, X(t))$ (car f est uniformément continue) donc :

$$X(t) = \int_0^t f(t, X(t))dt$$

La fonction X est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $t \to f(t, X(t))$.
4. Il n'y a pas unicité de la solution : la fonction nulle et la fonction $\text{sgn}(t)t^2$ sont toutes les deux solutions du problème.

Exercice 4 : Lemme de Carathéodory et sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

1. On fonctionne par récurrence descendante : supposons que x soit le barycentre de $p > n+1$ points d'une famille. Montrons qu'il est alors de barycentre de $p-1$ d'entre eux, il sera alors possible de descendre ce nombre de points à $n+1$. Supposons que

$$x = \sum_1^p \lambda_i x_i \text{ où } \lambda_i > 0,\ \sum_1^p \lambda_i = 1.$$

La famille $(x_i - x_1)$ est liée car elle contient plus de $n+1$ vecteurs en dimension n. On peut donc trouver des coefficients μ_i tels que $\sum_2^p \mu_i(x_i - x_1) = 0$. En posant $\mu_1 = -\sum_2^p \mu_i$, on a

$$\sum_1^p \mu_i x_i = 0 \text{ et } \sum_1^p \mu_i = 0.$$

On va rajouter cette relation à l'égalité de barycentrage de x pour obtenir de nouveaux coefficients : pour tout ε on a

$$\sum_1^p (\lambda_i + \varepsilon\mu_i)x_i = x.$$

Il s'agit donc de trouver ε tel que les coefficients soient positifs et un au moins s'annule. Les conditions de positivité des coefficients s'expriment

$$\varepsilon \geq -\frac{\lambda_i}{\mu_i} \text{ si } \mu_i > 0 \text{ et } \leq \text{ sinon.}$$

On peut donc trouver un ε qui convient et le résultat est montré.
2. Considérons l'application

$$(x,t) \in K^{n+1} \times \{t \in [0;1]^{n+1} | \sum_1^{n+1} t_i = 1\} \longmapsto \sum_1^{n+1} t_i x_i \in \mathrm{Conv}(K) \subset \mathbb{R}^n.$$

Celle-ci est évidemment continue, et la première question montre qu'elle est surjective vers l'enveloppe convexe de K. (qui est rappelons-le de manière équivalente le plus petit convexe contenant K, ou l'ensemble des barycentres de points de K.) Comme la source de cette application est compacte, son image l'est également.
3. a) Comme G est compacte, pour tout x l'application $g \mapsto \|gx\|$ est continue sur un compact, donc elle est bornée et atteint sa borne, de sorte que $\|x\|_G$ est bien définie et il existe g_x tel que $\|g_x x\| = \|x\|_G$.

La positivité, la séparation et l'homogénéité sont immédiats à vérifier, de même que l'invariance par G qui découle juste du fait que la multiplication par un élément d'un groupe est une bijection du groupe dans lui-même, il ne reste que l'inégalité triangulaire et la stricte convexité à vérifier. Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}\|x+y\|_G &= \|g_{x+y}(x+y)\| \\ &\leq \|g_{x+y}x\| + \|g_{x+y}y\| \\ &\leq \|x\|_G + \|y\|_G.\end{aligned}$$

On a donc bien l'inégalité triangulaire. Si l'on a égalité dans l'inégalité triangulaire, on a en particulier égalité dans la seconde ligne, donc les vecteurs $g_{x+y}x$ et $g_{x+y}y$ sont liés car la norme euclidienne est strictement convexe, donc x et y aussi.
b) En déduire que si K est un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ ne contenant pas 0, il admet un unique point fixe sous l'action de G.Soit x_0 qui réalise le minimum de $\| \bullet \|_G$ sur K, qui existe car K

est compact. Celui-ci est non nul car K ne contient pas 0, de plus, il est unique en tant que minimum car la norme est strictement convexe. (la norme prendrait des valeurs strictement inférieures au minimum sur un segment reliant deux points où celui-ci est atteint.)
c) Le convexe $\mathrm{Conv}(g^T g)_{g\in G}$ est compact par la question 2 et est stable par l'action $g \cdot M := g^T M g$. Celui-ci est inclus dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ car cet ensemble est convexe. La sous-question précédente assure l'existence d'un point fixe pour cet action (mais on applique le résultat dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pas $\mathbb{R}^n$) de sorte qu'il existe une matrice M symétrique définie positive telle que pour tout g $g^T M g = M$, ce qui signifie que les éléments de G sont orthogonaux pour le produit scalaire défini par M.

Exercice 5 🏠✎ : The Baire Necessities

1. Bah c'est le théorème.

2. Supposons X sans point isolé, alors pour tout x l'ouvert $X - \{x\}$ est dense, donc par lé théorème de Baire l'intersection (dénombrable !) de ces ouverts, c'est à dire $\emptyset$ serait dense, ce qui est absurde. Donc X a au moins un point isolé.

3. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de E. L'espace E est la réunion croissante des sous-espaces engendrés par les premiers vecteurs :

$$E = \bigcup_n \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n).$$

Chaque espace est de dimension fini, donc complet pour la norme induite, ils sont donc fermés dans E. Comme ils sont tous d'intérieur vide (Un sous-espace strict est toujours d'intérieur vide car autrement il contiendrait une boule, qui engendre tout l'espace.), le théorème de Baire est pris en défaut, E ne peut pas être complet.

4. Soit U un ouvert de X et (U_n) une suite d'ouverts denses de U. Posons alors $V_n := U_n \cup \overline{U}^c$, qui forment une suite d'ouverts de X. De plus, chacun de ceux-ci sont denses : soit $x \in X$, si $x \in \overline{U}^c \subset V_n$ c'est bon, sinon $x \in \overline{U}$, et donc tout voisinage ouvert de x rencontre U. Soit ω un voisinage ouvert de x, $\omega \cap U$ est un ouvert de U non vide, donc il rencontre U_n par densité de ce dernier, donc ω rencontre U_n. Ainsi, on a bien que V_n est dense dans X. Par le théorème de Baire dans X, l'intersection des V_n est dense dans X. Soit $x \in U$, tout voisinage ouvert ω de x inclus dans U rencontre $\bigcap V_n$, donc rencontre $\bigcap U_n$ puisque ω est disjoint de $\overline{U}^c$.

5. Soit $\varepsilon > 0$ et

$$F_n := \{x \in]0; +\infty[\, : \; \forall p \geq n \; |f(px)| \leq \varepsilon\}.$$

Les F_n sont des fermés (en tant qu'intersection de fermés, et par continuité de f), et par hypothèse, leur union recouvre R_+^*. Le théorème de Baire assure que l'un d'eux est d'intérieur non vide. Si $]a; b[\subset F_n$, alors pour tout x dans $\bigcup_{p\geq n}]pa; pb[$, $|f(x)| \leq \varepsilon$. De plus, cette union contient un intervalle de la forme $]A; +\infty[$ car les intervalles finissent par tout se chevaucher : si p est suffisament grand, $(p+1)a < pb$ à partir d'un certain rang car $\frac{p+1}{p}$ tend vers $1 < \frac{b}{a}$, et cela traduit le chevauchement des intervalles.

6. Une intersection de deux G_δ est un G_δ car un tel ensemble reste intersection dénombrable d'ouverts. Si ceux-ci sont denses, le théorème de Baire assure que l'intersection le sera aussi. $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est un G_δ-dense, si $\mathbb{Q}$ l'était aussi, leur intersection le serait également. Comme $\emptyset$ n'est pas dense, $\mathbb{Q}$ n'est pas un G_δ.

Exercice 6 ✐ : existence de fonctions continues nulle part dérivables

1. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de R_n convergeant vers une limite $f_\infty \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$. Nous allons montrer que f_∞ appartient à R_n.
Pour tout k, soit t_k tel que, pour tout $s \in [0,1]$:

$$|f_k(s) - f_k(t_k)| \leq n|s - t_k|$$

Quitte à considérer seulement une sous-suite, on peut supposer que $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite t_∞.
Pour tout $s \in [0;1]$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}|f_\infty(s) - f_\infty(t_\infty)| &\leq |f_\infty(s) - f_k(s)| + |f_k(s) - f_k(t_k)| + |f_k(t_k) - f_k(t_\infty)| + |f_k(t_\infty) - f_\infty(t_\infty)| \\ &\leq 2||f_\infty - f_k||_\infty + |f_k(s) - f_k(t_k)| + |f_k(t_k) - f_k(t_\infty)| \\ &\leq 2||f_\infty - f_k||_\infty + n|s - t_k| + n|t_k - t_\infty|\end{aligned}$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient :

$$|f_\infty(s) - f_\infty(t_\infty)| \leq n|s - t_\infty|$$

Donc $f_\infty \in R_n$.
2. Soient $f \in R_n$ et $\epsilon > 0$. Montrons que $\overline{B}(f,\epsilon) \not\subset R_n$.
Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note g_m la fonction qui est affine sur chaque intervalle de la forme $\left[\frac{k}{2m}; \frac{k+1}{2m}\right]$ avec $k \in \{0, ..., 2m-1\}$ et telle que, pour tout k :

$$g_m\left(\frac{2k}{2m}\right) = 1$$
$$g_m\left(\frac{2k+1}{2m}\right) = -1$$

La fonction f est uniformément continue. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que :

$$(|s - s'| \leq \alpha) \quad \Rightarrow \quad (|f(s) - f(s')| < \epsilon)$$

Soit m tel que $1/m \leq \min(2\alpha, \epsilon/2n)$. Notons $h = f + \epsilon g_m$. C'est un élément de $\overline{B}(f,\epsilon)$. Montrons que $h \notin R_n$.
Si h appartient à R_n, il existe un segment $I \subset [0;1]$ de longueur $\epsilon/2n$ tel que :

$$\forall s, s' \in I, \qquad |h(s) - h(s')| \leq \epsilon$$

En effet, il suffit de prendre $I = [t; t + \epsilon/2n]$ ou $I = [t - \epsilon/2n; t]$ avec t comme dans la définition de R_n. Avec l'une de ces définitions, on a, pour tous $s, s' \in I$:

$$\begin{aligned}|h(s) - h(s')| &\leq |h(s) - h(t)| + |h(t) - h(s')| \\ &\leq n(|s - t| + |s' - t|) \\ &\leq 2n\frac{\epsilon}{2n} = \epsilon\end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{m} \leq \frac{\epsilon}{2n}$, il existe k tel que $\frac{k}{2m} \in I$ et $\frac{k+1}{2m} \in I$. On a alors :

$$\begin{aligned}\epsilon &\geq \left|h\left(\frac{k}{2m}\right) - h\left(\frac{k+1}{2m}\right)\right| \\ &\geq \left|\epsilon g_m\left(\frac{k}{2m}\right) - \epsilon g_m\left(\frac{k+1}{2m}\right)\right| - \left|f\left(\frac{k}{2m}\right) - f\left(\frac{k+1}{2m}\right)\right| \\ &= 2\epsilon - \left|f\left(\frac{k}{2m}\right) - f\left(\frac{k+1}{2m}\right)\right|\end{aligned}$$

Donc $\left|f\left(\frac{k}{2m}\right) - f\left(\frac{k+1}{2m}\right)\right| \geq \epsilon$. C'est impossible car $\frac{1}{2m} \leq \alpha$.
3. Si $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue dérivable en un point t, alors f appartient à R_n pour un certain n.
En effet, la fonction $s \to \left|\frac{f(s)-f(t)}{s-t}\right|$ est continue sur $[0;1]$ si on la prolonge en t par $f'(t)$. Elle est donc bornée par un certain entier n. Par définition de R_n, on a $f \in R_n$ pour cette valeur de n.
Or $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} R_n$ est une union dénombrable de fermés d'intérieur vide. D'après le théorème de Baire, cet ensemble est également d'intérieur vide. Son complémentaire dans $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ est donc non-vide et toute fonction de son complémentaire n'est dérivable en aucun point.

Exercice 7 : points de continuité d'une fonction

1. Montrons que E_n est ouvert. Si $x \in E_n$, il existe $\mathcal{V}$ un voisinage de x tel que, pour tous $x', x'' \in \mathcal{V}$, $d(f(x'), f(x'')) < 1/n$. Quitte à prendre $\mathcal{V}$ un peu plus petit, on peut supposer que $\mathcal{V}$ est ouvert. Alors $\mathcal{V} \subset E_n$: pour tout $y \in \mathcal{V}$, $\mathcal{V}$ est un voisinage de y vérifiant la propriété voulue.
Montrons que f est continue en x si et seulement si $x \in \bigcap\limits_n E_n$.

- Si f est continue en x : pour tout n, il existe $\mathcal{V}$ un voisinage de x tel que, pour tout $x' \in \mathcal{V}$, $d(f(x), f(x')) < 1/2n$. Alors, pour tous $x', x'' \in \mathcal{V}$, $d(f(x'), f(x'')) \leq d(f(x'), f(x)) + d(f(x), f(x'')) < 1/n$. Donc $x \in E_n$.
- Si $x \in \bigcap\limits_n E_n$: soit $\epsilon > 0$ quelconque. Soit n tel que $1/n < \epsilon$. Comme $x \in E_n$, il existe $\mathcal{V}$ tel que, pour tout $x' \in \mathcal{V}$, $d(f(x), f(x')) < 1/n < \epsilon$.

2. a) Si $x \in \mathbb{Q}$, f n'est pas continue en x. En effet, puisque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe (x_n) une suite d'irrationnels convergeant vers x. Alors $f(x_n) \to 0 \neq f(x)$.
Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, f est continue en x. En effet, soit $\epsilon > 0$ quelconque. Soit q tel que $\frac{1}{q} < \epsilon$. Posons :

$$E = \{\frac{p}{q'} \text{ tq } q' \in \{1, ..., q-1\} \text{ et } p \in \mathbb{Z}\}$$

Cet ensemble est fermé et ne contient pas x. Soit $\eta < d(x, E)$. Pour tout $y \in]x-\eta; x+\eta[$, puisque $y \notin E$, $f(y) \leq 1/q < \epsilon$.
b) D'après la question 1., si c'est le cas, $\mathbb{Q}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbb{Q} = \bigcap_n E_n$$

avec les E_n ouverts. Tous les E_n sont denses car ils contiennent $\mathbb{Q}$.
D'après le théorème de Baire, puisque $\mathbb{R}$ est complet pour la topologie usuelle, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense donc non-vide. Pourtant, on devrait avoir :

$$\emptyset = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{Q} + \pi) = \left(\bigcap_n E_n \right) \cap \left(\bigcap_n (E_n + \pi) \right)$$

Les E_n et $E_n + \pi$ étant justement des ouverts denses, c'est impossible.

3. a) La fonction $h = 3/4 + 1_{\mathbb{Q}}/4$ convient (où $1_{\mathbb{Q}}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble des rationnels).

b) Soit d'abord $x \in \bigcap_n E_n$. Montrons que f est continue en x. Soit x_n une suite d'éléments de X convergeant vers x.
Pour tout M, $\bigcap_{m \leq M} E_n$ est un voisinage ouvert de x. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$, $x_n \in \bigcap_{m \leq M} E_n$, ce qui implique $N(x_n) > M$.
Donc $(N(x_n))$ tend vers $+\infty$. Puisque h est une fonction bornée, $f(x_n) \to 0 = f(x)$.
Soit maintenant x un point de continuité de f. Montrons que $x \in \bigcap_n E_n$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $N(x) < +\infty$.
Puisque $f(x) \in [\frac{3}{4}2^{-N(x)}; 2^{-N(x)}]$ et f est continue en x, il existe U un voisinage ouvert de x tel que :

$$\forall y \in U, f(y) \in \left[\frac{5}{8} 2^{-N(x)}; \frac{5}{4} 2^{-N(x)} \right]$$

Pour tout y, si $N(y) > N(x)$, $f(y) \leq 2^{-N(x)-1} < \frac{5}{8}2^{-N(x)}$. D'autre part, si $N(y) < N(x)$, $f(y) \geq \frac{3}{4}2^{-N(x)+1} > \frac{5}{4}2^{-N(x)}$.
Le fait que $f(y) \in [\frac{5}{8}2^{-N(x)}; \frac{5}{4}2^{-N(x)}]$ implique donc que $N(y) = N(x)$. La fonction N est donc constante sur U.
La fonction h est discontinue en x. Soit donc $\epsilon > 0$ tel que, pour tout voisinage V de x, il existe $x' \in V$ tel que $|h(x) - h(x')| > \epsilon$.
Si V est un voisinage de x, $V \cap U$ aussi, puisque U est un voisinage de X. Il existe donc $x' \in V \cap U$ tel que $|h(x) - h(x')| > \epsilon$. On a alors $x' \in V$ et $|f(x) - f(x')| = 2^{-N(x)}|h(x) - h(x')| > \epsilon 2^{-N(x)}$.
La fonction f n'est donc pas continue en x. C'est absurde.

Exercice 8 : Théorème de Corominas-Balaguer

Commençons par un résultat préliminaire :

Lemme 8.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I qui soit localement polynomiale en tout point de I. Alors f est un polynôme.*

f est localement- polynomiale en tout point, elle est donc analytique grâce à la formule de Taylor. De plus, grâce à la rigidité des fonctions analytiques, elle est le même polynôme partout. Donc f est un polynôme.

On va maintenant appliquer le théorème de Baire afin de montrer que qu'une des dérivées s'annule sur un ensemble d'intérieur non vide.

1. On pose $F_n := \{x \in \mathbb{R} \mid f^{(n)}(x) = 0\}$. Puisque $f^{(n)}$ est continue, F_n est fermé. L'hypothèse se traduit alors par
$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$
Grâce au théorème de Baire, l'un de ces fermés est d'intérieur non vide. $\exists p$ tel que $\mathring{F_p} \neq \emptyset$. De plus, si $f^{(n)}$ est nulle sur un ouvert, ses dérivées successives le sont aussi, donc la suite des $\mathring{F_n}$ est croissante.
2. Posons
$$\Omega := \bigcup_{n \geq p} \mathring{F_n}$$
On remarque que Ω n'est rien d'autre que l'ensemble des points où f est localement polynomiale. En effet, f est localement polynomiale en x si et seulement si une des dérivées de f est nulle au voisinage de x, c'est à dire x est dans l'un des $\mathring{F_p}$, i.e. dans Ω. L'idée d'introduire Ω vient naturellement en se disant que c'est la nullité au voisinage d'un point d'une des dérivées qui octroie le caractère localement polynomial et pas l'annulation ponctuelle. Pour pouvoir appliquer le lemme précédent, et donc conclure, il nous suffit maintenant de montrer que $F := \mathbb{R} \backslash \Omega$ est vide.

   En tant qu'ouvert, on sait déjà que Ω est l'union de ses composantes connexes par arcs, qui sont en nombre dénombrable.
$$\Omega = \bigcup_i]a_i; b_i[$$
Grâce au lemme précédent, on voit que f est polynomiale sur chacune de ses composantes connexes par arcs. Nous allons maintenant montrer que F est vide. Pour cela, on raisonne par l'absurde.
   (a) Montrons d'abord que F est parfait, c'est à dire n'a pas de points isolés. Si x est un point isolé, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon; x[$ et $]x; x + \varepsilon[$ ne rencontrent pas F, ils sont donc dans Ω. Donc f est polynomiale à droite de x et à gauche de x. Comme f est $\mathcal{C}^\infty$, elle est égale à son prolongement, que l'on peut effectuer en venant de droite, comme de gauche. Comme f est bien définie, ces prolongements sont égaux, et les deux polynômes définissant f sur chacun des intervalles sont égaux. f est alors polynomiale sur $]x - \varepsilon; x + \varepsilon[$. Donc $x \in \Omega$, ce qui est stupide. Donc F est parfait.
   (b) F est fermé dans $\mathbb{R}$, c'est donc un espace métrique complet, il est donc justiciable du théorème de Baire. On va en fait appliquer la même méthode que pour $\mathbb{R}$ à F afin d'obtenir une contradiction. On a toujours
$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \cap F$$
où les $F_n \cap F$ sont des fermés de F. Grâce à Baire, l'un de ces fermés est d'intérieur non vide dans F. Cela veut dire qu'il existe un intervalle ouvert J non vide de $\mathbb{R}$ et

un entier q tels que $J \cap F \subset F_q \cap F$. Ainsi, pour tout $x \in F \cap J$ $f^{(q)}(x) = 0$.
Remarquons d'abord que pour tout $m > q$, $f^{(m)} = 0$ sur $F \cap J$. En effet, si g est nulle sur F, puisque tout point de F est limite d'une suite d'autres points de F, l'accroissement entre deux points est donc bien défini et nul. Donc $g' = 0$. Une récurrence banale permet de montrer alors ce résultat.
Soit maintenant ω une composante connexe par arcs de Ω, d'intersection avec J non vide. Il existe m tel que $f^{(m)} = 0$ sur ω. Si $m \leq q$, $f^{(q)} = 0$ sur ω en dérivant, sinon, une des bornes de ω est dans $F \cap J$, et $f^{(q)} = 0$ quand même : il suffit d'intégrer récursivement, les conditions initiales étant nulles d'après le remarque. Finalement, $f^{(q)} = 0$ sur J et f y est polynomiale. Donc $F \cap J$ est vide, ce qui est absurde. Donc F est vide.

Finalement, $\Omega = \mathbb{R}$, il nous suffit d'appliquer le lemme pour conclure : f est polynomiale.

Exercice 9 🏠✐✐ : Théorème de Tietze-Urysohn

1.

$(T) \Rightarrow (U)$ Supposons (T) et montrons (U). Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints. Soit f la fonction définie sur $F_1 \cup F_2$ qui vaut 1 sur F_1 et 0 sur F_2. Celle-ci est continue car les fermés sont disjoints. On peut donc la prolonger en une fonction g définie sur X tout entier. Cette fonction répond au problème.

$(U) \Rightarrow (N)$ Supposons (N), soit F_1 et F_2 deux fermés. Soit f une fonction continue qui sépare les deux. Alors les ouverts $\{f < \frac{1}{3}\}$ et $\{f > \frac{2}{3}\}$ séparent les deux fermés.

$(U) \Rightarrow (T)$ On montre le premier sens compliqué. Commençons par remarquer qu'il est équivalent de montrer que l'on peut prolonger les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, et que l'on peut prolonger les fonctions à valeurs dans $[-M; M]$.

($\Rightarrow$) Supposons que l'on puisse prolonger les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $f : F \to [-M; M] \subset \mathbb{R}$. Il existe $g : X \to \mathbb{R}$ prolongeant f. Quitte à remplacer g par $h(x) := \varphi(g(x))$ où

$$\varphi(x) := \begin{cases} -M \text{ si } x < -M \\ x \text{ si } x \in [-M; M] \\ M \text{ si } x > M \end{cases},$$

on a bien l'existence de g à valeurs dans $[-M; M]$.

($\Rightarrow$) Réciproquement, soit $f : A \to \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et supposons que l'on puisse prolonger les fonctions à valeurs dans un segment. En composant f avec un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1; 1[$, on peut supposer que f est à valeurs dans $]-1; 1[$. On peut alors prolonger f par g, à valeurs dans $[-1; 1]$. Les fermés A et $F := \{g = \pm 1\}$ sont des fermés disjoints de x. On peut donc trouver une fonction h valant 0 sur F et 1 sur A, car on a déjà montré que $(T) \Rightarrow (U)$. La fonction $x \mapsto g(x)h(x)$ prolonge f et est bien à valeurs dans $]-1; 1[$. On peut ensuite recomposer par l'homéomorphisme avec $\mathbb{R}$ en sens inverse.

De même, on peut supposer que les fonctions continues séparant les fermés dans (U) sont à valeurs dans $[0; 1]$.

Montrons donc maintenant que $(U) \Rightarrow (T)$, soit $f : A \to [-M; M]$ une fonction continue définie sur un fermé. On considère les deux fermés $F_1 := \{f \leq -\frac{M}{3}\}$ et $F_2 := \{f \geq \frac{M}{3}\}$. Ce sont des fermés disjoints, on peut donc trouver $g_0 : X \to [-\frac{M}{3}; \frac{M}{3}]$ telle que g_0 vaille $-\frac{M}{3}$ sur F_1 et $\frac{M}{3}$ sur F_2. On vérifie alors facilement que $\|f - g_0\|_{\infty,A} \leq \frac{2M}{3}$.

En appliquant récursivement le point précédent, on montre l'existence d'une suite de fonctions (g_n) telle que

$$\|g_n\|_{\infty,X} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{M}{3},$$

$$\|f - g_0 - \cdots - g_n\|_{\infty,A} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n} M.$$

La série des g_n converge donc normalement vers une fonction continue sur X, qui se trouve être égale à f sur A, c'est donc le prolongement recherché.

$(N) \Rightarrow (U)$ Reste un dernier sens, probablement le plus dur : construire une fonction continue séparant des fermés en utilisant l'hypothèse de normalité. Supposons l'espace X normal. Commençons par remarquer que si l'on suppose que F_0 et F_1 sont deux fermés disjoints, il est possible de les séparer par des ouverts disjoints U et V. On a donc

$$F_0 \subset U \subset V^c \subset F_1^c.$$

Et comme V^c est fermé, on a même

$$F_0 \subset U \subset \overline{U} \subset V^c \subset F_1^c.$$

On a donc construit $U_{\frac{1}{2}}$ tel que

$$F_0 \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset F_1^c.$$

En réappliquant ce procédé aux paires $F_0 \subset U_{\frac{1}{2}}$ et $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset F_1^c$, on a l'existence de $U_{\frac{1}{4}}$ et $U_{\frac{3}{4}}$ tels que

$$F_0 \subset U_{\frac{1}{4}}\overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset F_1^c.$$

On continue indéfiniment ce procédé pour construire une famille croissante d'ouverts indexée par les dyadiques. On note (U_t) cette famille. (Faire un dessin) On définie ensuite la fonction

$$f(x) := \inf\{t \text{ dyadique tel que } x \in U_t\} \cup \{1\}.$$

Sur F_0, f vaut bien 0 car F_0 est dans tous les U_t. De même f vaut 1 sur F_1 car F_1 n'est dans aucun des U_t. Montrons que f est bien continue et on aura alors résolu notre problème.

Soit $b > 0$, montrons que $\{f < b\} = \bigcup_{t<b} U_t$, qui est donc ouvert en tant qu'intersection d'ouvert. Tout d'abord, si $f(x) < b$, il existe $t \in [f(x), b[$ un dyadique tel que $x \in U_t$, et donc $x \in \bigcup_{t<b} U_t$. Réciproquement, si x est dans cette union, x et dans un des U_t et on a

bien $f(x) \leq t < b$.

Soit maintenant $a > 0$, montrons que $\{f \leq a\} = \bigcap_{t>a} \overline{U_t}$. Si $f(x) \leq a$, soit t un dyadique supérieur à a. On a bien $f(x) \leq a < t$, donc il existe u dyadique entre $f(x)$ et t tel que $x \in U_u \subset U_t \subset \overline{U_t}$. Réciproquement, si $x \in \bigcap_{t>a} \overline{U_t}$, soit $t > s > a$ deux dyadiques supérieurs à a. On a alors $x \in \overline{U_s} \subset U_t$, donc $f(x) < t$. On fait maintenant tendre t vers a pour obtenir que $f(x) \leq a$. En passant au complémentaire, on a montré que $\{f > a\}$ est ouvert.

Enfin, si $a < b$, $f^{-1}(]a; b[) = \{f > a\} \cap \{f < b\}$ est bien ouvert en tant qu'intersection de deux ouverts. L'image réciproque de tout ouvert est donc un ouvert car les intervalles forment une base de topologie de $[0; 1]$, et f est donc bien continue.

2. Il suffit de montrer (U) : soit F_1 et F_2 deux fermés : la fonction

$$f(x) := \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$$

convient.
3. Il est possible de trouver une surjection continue de $[0; 1]^n$ par l'ensemble de Cantor, celui-ci étant vu comme une partie fermée de $[0; 1]$. On utilise le prolongement (T) pour étendre chacune des applications coordonnées à $[0; 1]$ de manière continue. On obtient une application continue $[0; 1] \to [0; 1]^n$ qui reste surjective.

Exercice 10 : Espace où la dérivation est continue
Soit M la norme triple de la dérivation sur l'espace E. Les fonctions de la boule unité sont donc toutes M-lipschitziennes. Le théorème d'Ascoli assure donc que la boule unité est compacte, ce qui force l'espace à être de dimension finie par le théorème de Riesz.

Exercice 11 : Inclusion dans des boules Soit $r := \inf\{R > 0 \mid \exists x \in E \text{ tel que } K \subset B(x, R)\}$ où l'on note $\mathcal{B}(x, R)$ la boule fermée de centre x et de rayon R. Cette borne inférieure existe car l'ensemble est minoré par 0 et est non vide : K est compact, donc borné et inclus dans une certaine boule $B(0, M)$. Il s'agit de montrer que cette borne est atteinte. Par définition de l'infimum, on peut trouver une suite (r_n) et une suite (x_n) telles que

$$r \leq r_n < r + \frac{1}{n} \text{ et } K \subset B(x_n, r_n).$$

La suite (x_n) est bornée : si $k \in K$, $\|x_n\| \leq \|x_n - k\| + \|k\| \leq r + \frac{1}{n} + M$. Donc quitte à extraire une sous-suite convergente, on peut supposer que (x_n) converge vers $x \in E$. Par continuité de la norme, on peut passer à la limite dans l'inégalité

$$\forall k \in K \ \|k - x_n\| \leq r_n.$$

Il vient

$$\forall k \in K \ \|k - x\| \leq r.$$

Ainsi, on a $K \subset B(x,r)$ et la borne inférieure est atteinte : il existe une boule de rayon minimal contenant K.
Une telle boule peut ne pas être unique. Considérons par exemple $K := [-1;1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ muni de la norme produit. Il est facile de voir que le rayon d'une boule contenant K est supérieur à 1 puisque la distance entre $(1,0)$ et $(-1,0)$ est égale à 2. Le rayon minimal vaut donc 1 car chacune des boules $\mathcal{B}(x,1)$ pour $x \in \{0\} \times [-1;1]$ convient, mais on n'a pas unicité. On peut en revanche montrer qu'on a unicité dans le cas où la norme est strictement convexe. Supposons donc que la boule unité soit strictement convexe (*i.e.* si $x, y \in B(0,1)$, $\frac{x+y}{2} \in \text{Int}B(0,1)$.) et qu'il existe $x \neq y$ tels que $K \subset B(x,r) \cap B(y,r)$. Soit $k \in K$ qui réalise le maximum de la fonction distance à $z := \frac{x+y}{2}$. Puisque $k \in K \subset B(x,r) \cap B(y,r)$, on a $\|x-k\|, \|y-k\| \leq r$, c'est à dire $x, y \in B(k,r)$, qui est strictement convexe par hypothèse. Donc $r' := \|k-z\| < r$. Comme k réalisait le maximum de la distance à z sur K, pour tout $w \in K$, $\|z-w\| \leq r'$, et on a $K \subset B(z,r')$. C'est absurde car r était le plus petit réel vérifiant cette propriété. Donc la boule est unique dans le cas où la boule unité est strictement convexe.