École Normale Supérieure — Topologie, analyse et calcul différentiel
24 octobre 2017

Feuille d'exercices n$^{\mathrm{o}}$5

Exercice 1 : compactification de Stone-Čech

Soient X un espace topologique et $\mathcal{F}_X$ l'ensemble des fonctions continues de X vers $[0;1]$. Soit :

$$E_X = [0;1]^{\mathcal{F}_X} = \prod_{f \in \mathcal{F}_X} [0;1].$$

On définit une application $\phi : X \to E_X$ par :

$$\phi(x) = \{f(x)\}_{f \in \mathcal{F}_X}.$$

1. Montrer que, si E_X est muni de la topologie produit, ϕ est une application continue.

2. Dans cette question, on suppose que X est un espace normal et séparé.
a) Montrer que ϕ est injective.
b) Montrer que ϕ est ouverte vers son image, c'est-à-dire que l'image par ϕ d'un ensemble ouvert de X est un ensemble ouvert de $\phi(X)$.
c) En déduire que X est homéomorphe à un sous-ensemble de $[0;1]^{\mathcal{F}_X}$.

3. On ne suppose maintenant plus que X est normal. On pose :

$$Y_X = \overline{\phi(X)}.$$

Montrer que Y_X est compact et que $\phi(X)$ est dense dans Y_X.

4. Nous allons montrer que la propriété suivante est vraie : si Z est un espace topologique compact et $g : X \to Z$ est une fonction continue, alors il existe une fonction $h : Y_X \to Z$ continue telle que $g = h \circ \phi$.
a) On suppose d'abord que $Z = [0;1]^I$, muni de la topologie produit, pour un certain ensemble I. On note, pour tout $i \in I$, $p_i : Z \to [0;1]$ la projection sur la i-ème coordonnée.
Montrer que $h : \{u_f\}_{f \in \mathcal{F}_X} \in Y_X \to \{u_{p_i \circ g}\}_{i \in I} \in Z$ vérifie les propriétés voulues.
b) Montrer la propriété pour Z sous-ensemble compact de $[0;1]^I$ (avec la topologie induite).
c) Montrer la propriété pour tous les compacts Z.
d) Montrer qu'une telle fonction h est unique. (On appelle Y_X la *compactification de Stone-Čech* de X.)

Exercice 2 : sur le théorème de Stone-Weierstrass

1. Soit X un espace topologique. On suppose qu'il existe une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles compacts de X tels que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ et tels que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ pour tout n.
Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, séparant les points et contenant les fonctions constantes.

Montrer que, pour toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ convergeant uniformément vers f sur tout compact.

2. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques compacts. On note $Y = \prod_i X_i$ muni de la topologie produit.
On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions continues de $Y \to \mathbb{R}$ ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de la forme $f : (x_i)_{i\in I} \to g((x_i)_{i\in E})$ avec E un sous-ensemble fini de I.
Montrer que $\mathcal{F}$ est dense dans $\mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$.

3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{C}$ n'est pas dense dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$.

4. Soit X compact. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ qui sépare les points de X. Montrer que, si $\mathcal{A}$ ne contient pas de fonction constante non-nulle, il existe $x_0 \in X$ tel que :

$$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \text{ tq } f(x_0) = 0\}.$$

Exercice 3 : théorème de Peano

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On note $|.|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.
Soient $\eta, R > 0$ et $U = [0; \eta] \times \overline{B}(x_0, R) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Soit $M > 0$ une borne de $|f|$ sur U.
On va démontrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que le problème

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X(t)) \qquad X(0) = x_0$$

admet une solution $X \in \mathcal{C}^1([0; \epsilon], \mathbb{R}^n)$.

1. Soit $\epsilon = \min(\eta, R/M)$. Montrer que, pour tout $\delta > 0$, il existe une fonction continue $X_\delta : [0; \epsilon] \to \mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que :
   - $X_\delta(0) = x_0$
   - $\forall t \in [0; \epsilon]$, si X_δ est dérivable en t, alors $|\frac{dX_\delta}{dt}(t) - f(t, X_\delta(t))| \leq \delta$.

[Indication : utiliser la « méthode d'Euler ».]

2. Montrer qu'il existe une suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $(X_{\delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément dans $\mathcal{C}^0([0; \epsilon], \mathbb{R}^n)$ vers une fonction $X : [0; \epsilon] \to \mathbb{R}^n$.

3. Montrer que X est une solution de l'équation.

4. On prend $n = 1$. Commenter l'exemple $f(t, x) = 2|x|^{1/2}$, $x_0 = 0$.

Exercice 4 : Lemme de Carathéodory et sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Montrer que si x est le barycentre d'une famille de points, il est le barycentre d'au plus $n+1$ points de cette famille.

2. Montrer le lemme de Carathéodory : l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.

3. On va se servir de ce résultat pour montrer que les sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ sont conjugués à un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\|x\|_G := \sup_{g \in G} \|g \cdot x\|$ où $\| \bullet \|$ désigne la norme euclidienne définit une norme strictement convexe invariante par G sur $\mathbb{R}^n$.
b) En déduire que si K est un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ ne contenant pas 0, il admet un unique point fixe sous l'action de G.
c) En considérant l'action de G par congruence matricielle sur un compact convexe bien choisi, montrer le résultat attendu.

Exercice 5 : The Baire Necessities

1. [Théorème] Soit (X, d) un espace métrique complet, montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

2. Soit (X, d) un espace métrique complet tel que X est dénombrable (et non-vide). Montrer que X a au moins un point isolé.

3. Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie dénombrable. Montrer qu'il ne peut être complet.

4. On dit qu'un espace est de Baire s'il vérifie le théorème de Baire. Montrer qu'un ouvert d'un espace de Baire est de Baire.

5. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x > 0$ on ait $f(nx) \longrightarrow 0$. Montrer alors que f tend vers 0 en l'infini.

6. On dit qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses est un G_δ-dense. A-t-on que $\mathbb{Q}$ est un G_δ-dense de $\mathbb{R}$?

Exercice 6 : existence de fonctions continues nulle part dérivables

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$R_n = \{f \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}) \text{ tq } \exists t, \forall s, |f(s) - f(t)| \leq n|s - t|\}.$$

1. Montrer que R_n est fermé dans $(\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$.
2. Montrer que R_n est d'intérieur vide.
3. En déduire qu'il existe des fonctions continues de $[0;1]$ vers $\mathbb{R}$ qui ne sont dérivables en aucun point de $[0;1]$.

Exercice 7 : points de continuité d'une fonction

Soit X un espace topologique. On appelle G_δ de X toute partie obtenue comme intersection dénombrable d'ouverts de X. Dans cet exercice, on montre que tout G_δ de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points de continuité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit X un espace topologique et soit $f : X \to \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$E_n = \{x \in X \text{ tq } \exists \mathcal{V} \text{ un voisinage de } x \text{ tel que } \forall x', x'' \in \mathcal{V}, d(f(x'), f(x''))) < 1/n\}$$

Montrer que les E_n sont des ouverts de X et que $\{x \text{ tq } f \text{ est continue en } x\} = \bigcap_n E_n$. Ainsi, l'ensemble des points de continuité d'une fonction de X dans $\mathbb{R}$ est un G_δ de X.

2. Dans la suite, $X = \mathbb{R}$. Considérons d'abord deux exemples.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ &= \frac{1}{q} \quad \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ avec } p, q \in \mathbb{Z}, q > 0 \text{ et } \frac{p}{q} \text{ irréductible} \end{aligned}$$

Montrer que f est continue en x si et seulement si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.
b) Montrer, à l'aide du théorème de Baire, qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit continue en x si et seulement si $x \in \mathbb{Q}$. ($\mathbb{Q}$ n'est donc pas un G_δ.)

3. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. Posons $A = \bigcap\limits_n U_n$. Nous allons montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de continuité est A.
a) Montrer qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to [3/4; 1]$ qui ne soit continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons $N(x) = \min\{n \text{ tq } x \notin U_n\}$. On pose, par convention, $N(x) = \infty$ si $x \in \bigcap\limits_n U_n$.
Montrer que l'ensemble des points de continuité de la fonction $f : x \to 2^{-N(x)}h(x)$ est exactement A.

Exercice 8 : Théorème de Corominas-Balaguer

Montrer la surprenante équivalence suivante pour toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x\ \exists n\quad f^{(n)}(x) = 0 \Leftrightarrow \exists n\ \forall x\quad f^{(n)}(x) = 0.$$

On pourra utiliser le théorème de Baire, et montrer que l'ensemble des points où f n'est pas localement un polynôme est vide (en montrant qu'il n'a pas de points isolés, puis en réappliquant le théorème de Baire.)

Exercice 9 : Théorème de Tietze-Urysohn

1. Soit X un espace topologique séparé. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   - (U) Étant donné deux fermés disjoints, il est possible de trouver une fonction continue qui vaut 1 sur le premier et 0 sur le second.
   - (T) Il est possible de prolonger de manière continue les fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies sur un fermé A.
   - (N) Il est possible de séparer deux fermés disjoints par des ouverts eux aussi disjoints.
2. Montrer que ces propriétés sont vrais dans le cas d'un espace métrique.
3. En se servant du TD de la semaine dernière, montrer qu'il est possible de trouver une surjection continue des cubes $[0; 1]^n$ par le segment $[0; 1]$.

Exercice 10 : Espace où la dérivation est continue

Soit E un espace de fonctions continues et dérivables tel que la dérivation en soit un endomorphisme continue. Montrer qu'il est de dimension finie.

Exercice 11 : Inclusion dans des boules Soit K un compact dans un espace vectoriel réel de dimension finie. Montrer qu'il existe une boule de rayon minimal contenant K. Cette boule est-elle unique ? Montrer qu'elle l'est si la norme est strictement convexe.