Td n° 5 d'Analyse fonctionnelle

Distributions et convolution

Séance du 15 mars 2013

Exercice 1. *Petits calculs de convolutions*

1. Trouver une distribution $H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que : $\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad (H * f)' = f$. H est la fonction de Heaviside.

2. Calculer les convolutions suivantes (après en avoir justifié l'existence) :

$$\begin{array}{l} \delta_a * H, \quad \delta' * \mathbb{1}, \quad (x^m \delta_0^{(n)}) * (x^p \delta_0^{(q)}), \quad (\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'', \\ T * \mathbb{1}, \quad T * \exp, \qquad \text{où } T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}). \end{array}$$

3. Comparer $(\mathbb{1} * \delta') * H$ et $\mathbb{1} * (\delta' * H)$. Qu'en conclure ?

4. Trouver $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

⋆

Exercice 2. *Equations différentielles*

On appelle solution fondamentale d'une équation différentielle linéaire inhomogène

$$\sum_k a_k(t) y^{(k)}(t) = f(t)$$

une distribution u telle que $\sum_k a_k u^{(k)} = \delta_0$. On en déduit alors une solution pour $f(t)$, en considérant $u * f$ (si c'est possible).

On introduit $\mathcal{D}'_+ = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) | \operatorname{Supp}(u) \subset \mathbb{R}^+\}$.

1. Expliquer pourquoi il est possible de convoler deux distributions de $\mathcal{D}'_+$. En déduire que $\mathcal{D}'_+$ forme une algèbre commutative pour $*$, d'élément neutre δ_0.

On notera u^{*n} la n-ième puissance de u, pour $n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{Z}$ si u est inversible).

2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\delta_0' - \lambda\delta_0$ est inversible, et que : $(\delta_0' - \lambda\delta_0)^{*-1} = H(t)e^{\lambda t}$.

3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(\delta_0' - \lambda\delta_0)^{*-n} = H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}$.

4. En déduire que toute équation différentielle linéaire à coefficients constants admet une solution fondamentale dans $\mathcal{D}'_+$.

⋆

Exercice 3. *Approximation de l'identité et convolution dans L^p*

1. Soit $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\|\phi * \psi\|_{L^p} \leq \|\phi\|_{L^1} \|\psi\|_{L^p}$

2. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ positive, $\|\phi\|_{L^1} = 1$ et $\operatorname{Supp} \phi \subset B(0,1)$. On pose $\phi_m(x) = m^n \phi(mx)$. Si f est continue (bornée), montrer que $\phi_m * f \to f$ uniformément sur les compacts. En déduire que si pour tout $p < \infty$, si $f \in L^p$:

$$\|f * \phi_m - f\|_{L^p} \to 0 \quad \text{quand} \quad m \to \infty.$$

Que se passe-t-il pour L^∞ ? En déduire que $\mathcal{D}$ est dense dans L^p, $p < \infty$.

3. Soient $p, q, r \geq 1$ tels que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Montrer l'on a :

$$\|\phi * \psi\|_{L^r} \leq \|\phi\|_{L^p} \|\psi\|_{L^q},$$

et montrer que l'on peut étendre la convolution à $L^p(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$ en une application bilinéaire continue.

⋆

Exercice 4. *Solution élémentaire du laplacien*

On souhaite trouver les solutions de $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

1. Calculer $\Delta(|x|^\alpha)$ dans $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$:

$$< \Delta \frac{1}{|x|^{N-2}}, \phi >= \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon} (\phi \frac{\partial |x|^{2-N}}{\partial n} - |x|^{2-N} \frac{\partial \phi}{\partial n}) d\sigma_\epsilon,$$

où $d\sigma_\epsilon$ est la mesure de surface sur ∂B_ϵ et $n(x) = \frac{x}{|x|}$ est la normale extérieure à B_ϵ.

3. Montrer que $-\Delta(\frac{1}{|x|^{N-2}}) = (N-2) mes(\mathbb{S}^{N-1}) \delta_0$ au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

4. Exhiber une solution explicite (au sens des distributions) de $-\Delta u = f$ si $f \in \mathcal{E}'(\mathcal{R}^N)$ et $N \geq 3$.

5. Montrer que $-\Delta(-\frac{1}{2\pi} ln(|x|)) = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'$.

⋆

Exercice 5. *Propriété de la moyenne*

Soit $n \geq 2$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f \in C^0(\Omega)$ vérifie la propriété de la moyenne si :

$$\forall x \in \Omega, r > 0 \text{ tels que } B(x,r) \subset \Omega, \quad f(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} f(s) ds.$$

1. Montrer qu'une fonction f de classe C^2 vérifiant la propriété de la moyenne satisfait :

$$-\Delta f = 0.$$

Indication : On pourra faire un développement de Taylor de f à l'ordre 2.

2. En déduire que si $f \in C^0$ vérifie la propriété de la moyenne, alors $-\Delta f = 0$ au sens des distributions.

3. Réciproquement, montrer que si $f \in \mathcal{C}^\infty$ satisfait $-\Delta f = 0$, alors f vérifie la propriété de la moyenne.

Indication : On peut calculer $\int_{B(0,r)} f \Delta(|x|^2 - r^2)$.

4. Montrer que si une distribution T satisfait $-\Delta T = 0$ alors T s'identifie à une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et satisfait le propriété de la moyenne.

Indication : On pourra considérer des approximation de l'unité ϕ_m, montrer que $\phi_m * T$ satisfait la propriété de la moyenne et converge uniformément sur les compacts. Pour cela on pourra considérer les fonctions $\phi_{x,r}(y) = \psi(|x-y|/r)$, $\psi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ fixée.

⋆