

Td n° 5 d'Analyse fonctionnelle

TRANSFORMATION DE FOURIER

Séance du 14 mars 2014

Exercice 1. *Quelques questions sur la transformée de Fourier*

1. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie non nulle. Montrer que $\widehat{\mathbb{1}_A}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$, mais pas à $L^1(\mathbb{R}^d)$.

2. Existe-t-il deux fonctions $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $f * g = 0$? Que se passe-t-il si on demande de plus que $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$?

3. Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et a_1, \dots, a_k des réels non tous nuls tel que $\sum_{i=1}^k a_i \partial^i u = 0$. Montrer que $u = 0$.

4. Soit $u \in \mathcal{S}'$ telle que $\Delta u = 0$. Montrer que u est un polynôme.

★

Exercice 2. *Transformée de Fourier de vp x*

On rappelle que la *valeur principale* de $1/x$ est définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle \text{vp } x, \phi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right).$$

1. Montrer que $x \text{vp } x = \mathbb{1}$.

2. Pourquoi $\mathcal{F}(\text{vp } x)$ est-elle bien définie? Montrer que $\mathcal{F}(\text{vp } x)$ est impaire au sens des distributions, c'est-à-dire que, en notant $\varphi^v(x) = \varphi(-x)$, on a $\langle \mathcal{F}(\text{vp } x), \varphi^v \rangle = - \langle \mathcal{F}(\text{vp } x), \varphi \rangle$.

3. En déduire $\mathcal{F}(\text{vp } x)$.

★

Exercice 3. *Théorème de Paley-Wiener pour les distributions*

1. Expliquer pourquoi la transformée de Fourier d'une distribution $T \in \mathcal{E}(\mathbb{R})'$ est analytique.

Cependant, la transformée de Fourier d'une fonction analytique n'est pas toujours une distribution à support compact (elle n'est même pas toujours définie!). Le but de cet exercice est de montrer une condition nécessaire et suffisante pour avoir cette propriété.

2. Montrer qu'une fonction F , analytique sur \mathbb{C} est la transformée de Fourier d'une distribution T à support compact si et seulement si il existe R, N, C tels que

$$|F(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^N) e^{R|\Im(\xi)|}.$$

Indication : On pourra régulariser T et utiliser la condition vue en cours.

★

Exercice 4. *L'équation de Schrödinger*

On considère l'équation sur \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} u + \Delta u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (1)$$

1. On suppose $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Résoudre l'équation (1) dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$.
2. Justifier pourquoi la transformée de Fourier de $e^{it|\xi|^2}$ est bien définie.
3. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement négative, on a

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2}) = \frac{1}{(-4\alpha\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x|^2}{4\alpha}}.$$

4. Montrer que cette égalité reste vraie, au sens de \mathcal{S}' , pour α imaginaire pur.
5. En déduire qu'il existe C (à déterminer) telle que pour $u_0 \in L^1$ la solution $u(t, x)$ vérifie, pour $t > 0$

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}} \|u_0\|_{L^1}.$$

★

Exercice 5. *Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin*

On veut montrer le résultat suivant : soit $1 \leq p_0 \neq p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0 \neq q_1 \leq \infty$ et T un opérateur tel que

- $T \in \mathcal{L}(L^{p_0}, L^{q_0})$ de norme M_0 ,
- $T \in \mathcal{L}(L^{p_1}, L^{q_1})$ de norme M_1 .

On veut montrer que T se prolonge en un opérateur de $\mathcal{L}(L^p, L^q)$ de norme $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$, où p, q, θ sont tels que $0 < \theta < 1$ et $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ et $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.

1. Soit $f, g \in \mathcal{D}$ tels que $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^{q'}} = 1$. Pour $0 \leq \Re(z) \leq 1$ on pose $\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$ et $\frac{1}{q'(z)} = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1}$. On pose alors

$$\phi(x, z) = |f(x)|^{\frac{p}{p(z)}} \frac{f}{|f|}, \quad \psi(x, z) = |g(x)|^{\frac{q'}{q'(z)}} \frac{g}{|g|}.$$

Montrer que $F(z) = \langle T\phi(z), \psi(z) \rangle$ est analytique dans $0 < \Re(z) < 1$ et continue et bornée sur $0 \leq \Re(z) \leq 1$ et que l'on a

$$|F(it)| \leq M_0, \quad |F(1+it)| \leq M_1.$$

2. Montrer $|F(\theta + it)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

Indication : On pourra considérer les fonctions $F_\epsilon(z) = e^{\epsilon z^2 + \lambda z} F(z)$, et utiliser le principe du maximum.

3. Conclure

Applications du théorème de Riesz-Thorin

4. Inégalité de Young. Soit $f \in L^p, g \in L^q$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Montrer que $f * g \in L^r$ où r est tel que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

5. Inégalité de Hausdorff-Young. Soit $1 \leq p \leq 2$. Montrer que l'on peut prolonger la transformée de Fourier en une application $\mathcal{F} : L^p \mapsto L^{p'}$.

6. Montrer que pour $u_0 \in L^p$ avec $1 \leq p \leq 2$ la solution de l'équation de Schrödinger (1) vérifie, pour $t > 0$

$$\|u(t)\|_{L^{p'}} \leq \frac{C}{|t|^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})}} \|u_0\|_{L^p}.$$

★