Analyse fonctionnelle
TD n^{o} 5

Convexité — Théorème de Krein-Milman

Séance du 27 février 2017

Exercice 1. *Échauffement*

Soit X un espace vectoriel normé. Quel est le dual topologique de X^* muni de la topologie faible-étoile $\sigma(X^*, X)$?

⋆

Exercice 2. *Convexes fermés fort et non fermés faible-$*$*

1. Dans ℓ^∞, on considère

$$C := \{u \mid \liminf_{n\to\infty} u_n \geq 0\}.$$

Montrer que C est un convexe fermé fort, non fermé faible-$*$.

2. Soit E un espace de Banach non réflexif. Montrer qu'il existe une forme linéaire sur E^* d'une autre forme que $\varphi_x : \ell \mapsto \ell(x)$, où $x \in E$. Montrer que le noyau d'une telle forme est un hyperplan fermé fort, mais pas fermé faible-$*$.

Indication : On pourra montrer que pour E espace vectoriel normé, tout hyperplan de E^* fermé pour la topologie faible-$*$ $\sigma(E^*, E)$ est le noyau d'une forme linéaire de type φ_x.

⋆

Exercice 3. *Sur* $L^1([0,1])$

1. Montrer que la boule unité de $L^1([0,1])$ n'admet pas de point extrémal.

2. En déduire qu'il n'existe aucune isométrie entre $L^1([0,1])$ et le dual topologique d'un espace vectoriel normé.

3. Montrer qu'en revanche, ℓ^1 est le dual de c_0, l'espace des suites de limite nulle.

⋆

Exercice 4. *Matrices bistochastiques*

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des *matrices bistochastiques* de taille $n \times n$, c'est-à-dire des matrices à coefficients positifs, dont la somme des coefficients de chaque ligne ou colonne fait 1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{B}_n$ s'écrit comme une combinaison convexe de matrices de permutations.

⋆

Exercice 5. *Le théorème de Stone-Weierstrass complexe via Krein-Milman*

On considère X un espace métrique compact. Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$. Le but de cet exercice est d'établir le résultat intermédiaire suivant :

Définition 1. *Une partie E de X est dite A-antisymétrique si l'algèbre A_E des restrictions des fonctions de A à E ne contient pas de fonction réelle non constante.*

Théorème (Bishop)**.** *Supposons que A soit fermée. Soit $g \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$ telle que $g_{|E} \in A_E$ pour toute partie A-antisymétrique maximale (pour l'inclusion). Alors $g \in A$.*

1. Montrer que le théorème de Bishop entraîne celui de Stone-Weierstrass dans le cas complexe :

Théorème (Stone-Weierstrass)**.** *Soit X un espace métrique compact, et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$ séparant les points, stable par conjugaison complexe, et telle qu'en tout point $x \in X$ il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) \neq 0$. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$.*

Dans la suite, on démontre le théorème de Bishop. On considère l'ensemble

$$A^{\perp} := \left\{ \mu \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C}),\ \int_X f d\mu = 0,\ \forall f \in A \right\},$$

où $\mathcal{M}(X, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des mesures boréliennes régulières complexes. On note également

$$K := \left\{ \mu \in A^{\perp},\ \|\mu\| \leq 1 \right\}.$$

2. Montrer que K est convexe, qu'il est compact pour la topologie faible-$*$ sur $\mathcal{M}(X, \mathbb{C})$, *i.e.* $\sigma(\mathcal{M}(X, \mathbb{C}), \mathcal{C}^0(X, \mathbb{C}))$, et qu'on peut supposer que K n'est pas réduit à $\{0\}$.

3. Soit μ un point extrémal de K. On introduit E_μ le support de μ, *i.e.* le plus petit compact de $E_\mu \subset X$ tel que $|\mu|(E) = \|\mu\|$. Supposons donnée une application $f \in A$, à valeurs réelles, et telle que $-1 < f(x) < 1$ sur E_μ. On considère alors les mesures $d\sigma := \frac{1}{2}(1 + f)d\mu$ et $d\tau := \frac{1}{2}(1 - f)d\mu$. Montrer que $\sigma/\|\sigma\|$ et $\tau/\|\tau\|$ appartiennent à K, et que μ est une combinaison convexe de ces deux mesures. En déduire f est constante, puis que E_μ est A-antisymétrique.

4. Soit g satisfaisant les hypothèses du théorème de Bishop. Déduire du théorème de Krein-Milman que pour tout $\mu \in K$, on a $\langle g, \mu \rangle = 0$. Conclure.

$\star$

Exercice 6. *Un contre-exemple ?*

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques vérifiant

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = 0,$$

pour tout entier $k < 0$. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}^0_{\text{per}}$, qui sépare les points et contient 1. Ce résultat contredit-il le théorème de Stone-Weierstrass ?

$\star$