# Analyse fonctionnelle
# TD n° 5

## Distributions

Séance du 12 mars 2018

**Exercice 1.** *Échauffement*
On pose $f(x) = |\sin(x)|$, $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f''$ au sens des distributions.

⋆

**Exercice 2.** *Quelques exemples de distributions*

1. Montrer que $u : \phi \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{(j)}(j)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre infini.

2. Montrer que la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$, mais ne se prolonge pas à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

⋆

**Exercice 3.** *Distributions régulières*

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T'$ s'identifie à une fonction $f$ continue. Montrer que $T$ s'identifie à une fonction $g \in C^1(\mathbb{R})$ et que $g' = f$.

2. Soient $a \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C^0(\mathbb{R})$, tels que l'on ait, au sens des distributions,

$$u' + au = f.$$

Montrer que $u \in C^1(\mathbb{R})$, et que l'équation précédente est satisfaite au sens classique.

3. Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $1 < p < \infty$. On suppose que

$$\sup_{\phi \in \mathcal{D}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|\langle T, \phi \rangle|}{\|\phi\|_{L^p}} < \infty.$$

Montrer que $T$ s'identifie à une fonction de $L^q(\Omega)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

4. Soit $T \in \mathcal{D}'(]0,1[)$ telle que $T'$ s'identifie à une fonction $f \in L^2(]0,1[)$. Montrer que $T$ s'identifie à une fonction $u \in L^2(]0,1[)$, et en déduire que $u \in C^0([0,1])$.

⋆

**Exercice 4.** *Distributions dont le support est un point*
Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tel que $\operatorname{supp} u = \{0\}$. Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive, telle que $\psi = \mathbb{1}$ sur un voisinage de $\overline{B(0,1)}$ et $\operatorname{supp} \psi \in B(0,2)$. On pose $\psi_r(x) := \psi(x/r)$ pour $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Rappeler pourquoi $u$ est d'ordre fini, que l'on notera $m \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $\forall r > 0$, $\psi_r u = u$.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, telle que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$, on ait $(D^\alpha \varphi)(0) = 0$. Montrer que $\|\psi_r \varphi\|_{\mathcal{C}^m} \to 0$ quand $r \to 0$.

*Indication :* On pourra montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $K$ de 0, tel que pour tout $x \in K$, et tout multi-indice $\beta$ tel que $|\beta| \leq m$, $|(D^\beta \varphi)(x)| \leq \varepsilon (n|x|)^{m-|\beta|}$.

4. En déduire que $\langle u, \varphi \rangle = 0$.

5. Montrer qu'il existe des nombres complexes $a_\beta$ tels que $u = \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta \delta_0^{(\beta)}$.

⋆

**Exercice 5.** *Valeur principale de $1/x$*

On définit la valeur principale de $1/x$, notée $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$, de la manière suivante :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \left\langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \phi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right).$$

1. Grâce à un développement de Taylor, montrer que la limite existe, et que la formule définit bien une distribution. Quel est son ordre ?

2. Montrer que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est la dérivée de $\log|x|$ au sens des distributions.

3. Montrer que $x \cdot \mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = \mathbb{1}$.

4. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xu = \mathbb{1}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u = \mathrm{vp}(\frac{1}{x}) + c\delta_0$.

5. Montrer que $|x|^{\alpha-2}x \to \mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $\alpha \searrow 0$.

⋆

**Exercice 6.** *Support et ordre*

Soit $u$ l'application linéaire définie, pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, par :

$$u(\phi) = \lim_{n \to \infty} \left( \sum_{i=1}^{n} \phi\left(\frac{1}{i}\right) - n\phi(0) - \log(n)\phi'(0) \right).$$

1. Montrer que $u(\phi)$ est bien définie, et que $u$ est une distribution d'ordre au plus 2.

2. Quel est le support $S$ de $u$ ?

3. On considère une suite d'élément $\phi_k$ de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ satisfaisant (i) $\mathrm{supp}(\phi_k) \subseteq ]\frac{1}{k+1}, 2[$, (ii) $0 \leq \phi_k \leq 1$, (iii) $\phi_k|_{[\frac{1}{k},1]} = 1$. Soit $p \in \mathbb{N}$. À l'aide des $\phi_k$, montrer qu'on ne peut obtenir aucune majoration du type

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{i=0}^{p} \sup_{x \in S} |\phi^{(i)}(x)|.$$

4. Quel est l'ordre de $u$ ?

*Indication :* On pourra considérer des fonctions du type $\psi_k(x) := \psi(x) \int_0^x (\int_0^y \phi(kt)dt)dy$, où $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$ d'intégrale 1, et $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(]-1,2[)$ est telle que $\psi(x) = 1$ pour $x \in [0,1]$.

⋆