

Analyse fonctionnelle

TD n° 5

TOPOLOGIES FAIBLE ET FAIBLE * (2)

Séance du 4 mars 2019

Exercice 1. *Échauffement : Minimum d'une fonction convexe sur un convexe*

1. On étudie la version séquentielle du théorème de Banach-Alaoglu.

- Soit E un espace vectoriel normé séparable. Démontrer par un procédé d'extraction diagonale que toute suite bornée de E^* admet une sous-suite qui converge pour la topologie faible *.
- Trouver un contre-exemple dans un espace vectoriel normé non séparable.
- Montrer que dans un espace non réflexif, on ne peut pas forcément extraire d'une suite bornée une sous-suite faiblement convergente.

2. Application. Soit H un Hilbert, C un convexe fermé de H (pour la topologie forte).

- Montrer que C est égal à l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent. Retrouver le fait que C est faiblement séquentiellement fermé.
- Soit $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ convexe continue telle que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Montrer qu'il existe un minimum de f sur C .

★

Exercice 2. *Sur l'adhérence séquentielle faible*

Soit H un Hilbert séparable, muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$. On considère l'ensemble

$$F := \{e_m + me_n \mid m, n \geq 1\}.$$

Montrer que 0 n'est pas dans l'adhérence séquentielle faible de F , mais qu'il appartient à l'adhérence séquentielle faible de l'adhérence séquentielle faible de F .

★

Exercice 3. *Convexes fermés fort et non fermés faible **

1. Dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$, on considère

$$C := \{u \mid \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n \geq 0\}.$$

Montrer que C est un convexe fermé fort, non fermé faible *.

2. Soit E un espace de Banach non réflexif. Montrer qu'il existe une forme linéaire sur E^* d'une autre forme que $\varphi_x : \ell \mapsto \ell(x)$, où $x \in E$. Montrer que le noyau d'une telle forme est un hyperplan fermé fort, mais pas fermé faible *.

Indication : On pourra montrer que pour E espace vectoriel normé, les formes linéaires continues sur E^* muni de la topologie faible * $\sigma(E^*, E)$ sont les évaluations du type $\varphi_x, x \in E$ (cf TD4, exercice 4, question 2).

★

Exercice 4. *Théorème de Eberlein-Šmulian*

Le but de cet exercice est de prouver le résultat suivant :

Théorème. Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E . Si A est compacte pour la topologie faible, alors A est séquentiellement (faiblement) compacte.

1. On dit qu'une famille $(\ell_j)_{j \in J} \subset E^*$ sépare les points si pour tout $x \in E : (\forall j \in J, \ell_j(x) = 0) \Rightarrow x = 0$. Montrer qu'un espace normé séparable admet une famille dénombrable de formes linéaires continues séparant les points, de norme 1.

2. Montrer que si E admet une famille dénombrable bornée de formes linéaires séparant les points, alors les compacts faibles sont métrisables.

3. On considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$. On note $F = \overline{\text{Vect}\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$ (on ne précise pas si l'adhérence est forte ou faible : pourquoi?). Montrer que $A \cap F$ est séquentiellement compact dans F pour la topologie faible $\sigma(F, F^*)$, et conclure.

4. Montrer que ce résultat est faux pour la topologie faible $*$.

★

Exercice 5. Le théorème de Stone-Weierstrass complexe via celui de Krein-Milman

On considère X un espace métrique compact. Soit A une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$. Le but de cet exercice est d'établir le résultat intermédiaire suivant :

Définition 1. Une partie E de X est dite A -antisymétrique si l'algèbre A_E des restrictions des fonctions de A à E ne contient que des fonctions réelles constantes.

Théorème (Bishop). Supposons que A soit fermée. Soit $g \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$ telle que $g|_E \in A_E$ pour toute partie E A -antisymétrique maximale (pour l'inclusion). Alors $g \in A$.

1. Montrer que le théorème de Bishop entraîne celui de Stone-Weierstrass dans le cas complexe :

Théorème (Stone-Weierstrass). Soit X un espace métrique compact, et \mathcal{A} une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$ séparant les points, stable par conjugaison complexe, et telle qu'en tout point $x \in X$ il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) \neq 0$. Alors \mathcal{A} est dense dans $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$.

Indication : On pourra montrer que les parties A -antisymétriques maximales sont les singletons.

Dans la suite, on démontre le théorème de Bishop. On considère l'ensemble

$$A^\perp := \left\{ \mu \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C}) \mid \int_X f d\mu = 0, \forall f \in A \right\},$$

où $\mathcal{M}(X, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des mesures de Radon complexes sur X . On note également

$$K := \left\{ \mu \in A^\perp \mid \|\mu\| \leq 1 \right\}.$$

2. Montrer que K est convexe, qu'il est compact pour la topologie faible $*$ sur $\mathcal{M}(X, \mathbb{C})$, *i.e.* $\sigma(\mathcal{M}(X, \mathbb{C}), \mathcal{C}^0(X, \mathbb{C}))$, et qu'on peut supposer que K n'est pas réduit à $\{0\}$.

3. Soit μ un point extrémal de K . On introduit E_μ le support de μ , *i.e.* le plus petit compact $E_\mu \subset X$ tel que $|\mu|(E_\mu) = \|\mu\|$. Supposons donnée une application $f \in A$, à valeurs réelles, et telle que $-1 < f(x) < 1$ sur E_μ . On considère alors les mesures $d\sigma := \frac{1}{2}(1+f)d\mu$ et $d\tau := \frac{1}{2}(1-f)d\mu$. Montrer que $\sigma/\|\sigma\|$ et $\tau/\|\tau\|$ appartiennent à K , et que μ est une combinaison convexe de ces deux mesures. En déduire f est constante, puis que E_μ est A -antisymétrique.

4. Soit g satisfaisant les hypothèses du théorème de Bishop. Déduire du théorème de Krein-Milman que pour tout $\mu \in K$, on a $\langle g, \mu \rangle = 0$. Conclure.

5. Soit \mathcal{A} l'ensemble des fonctions continues 2π -périodiques vérifiant $\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx} dx = 0$, pour tout entier $k < 0$. Montrer que \mathcal{A} est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}_{\text{per}}^0$, qui sépare les points et contient 1. Ce résultat contredit-il le théorème de Stone-Weierstrass ?

★