Corrigé – TD 5

Mesure de Lebesgue, Théorèmes de Fubini

Exercice 0. Soit $\varphi\colon ([0,1],\mathcal{B}([0,1])) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On définit $F\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ par

$$F(t) = \int_{[0,1]} \sqrt{\varphi(x)^2 + t}\, dx.$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que F soit dérivable en 0.

Corrigé :

1. Posons, pour tous $t \geq 0$ et $x \in [0,1]$,

$$f(x,t) = \sqrt{\varphi(x)^2 + t}.$$

Pour tout $t \geq 0$, $f(x,t) \leq |\varphi(x)| + \sqrt{t}$ qui est intégrable sur $[0,1]$. La fonction F est donc bien définie. De plus, pour tout $A > 0$ et pour tout $t \in [0,A]$, $f(x,t) \leq |\varphi(x)| + \sqrt{A}$. D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, F est continue sur tout ensemble de la forme $[0,A]$ et donc sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f est de plus dérivable par rapport à t en tout $t > 0$ et

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x)^2 + t}}.$$

Soient $a > 0$ et $t > a$. On a alors

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Ainsi, F est dérivable sur tout ensemble de la forme $]a,+\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée

$$F'(t) = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x)^2 + t}}\, dx.$$

2. Soit $(t_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissant vers 0. On a

$$\frac{F(t_n) - F(0)}{t_n} = \int_0^1 \frac{\sqrt{\varphi(x)^2 + t_n} - |\varphi(x)|}{t_n}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)^2 + t_n} + |\varphi(x)|}\, dx.$$

D'après le théorème de convergence monotone,

$$\frac{F(t_n) - F(0)}{t_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{2|\varphi(x)|}\, dx.$$

Ainsi, F est dérivable en 0 si et seulement si $1/|\varphi|$ est intégrable.

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à `shen.lin@ens.fr`, ou bien à passer au bureau V7.

Exercice 1. Soit $f\colon (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue λ. On suppose que pour tous $a < b$,

$$\int_{]a,b[} f(x)\,\lambda(dx) = 0.$$

Montrer que $f = 0$ λ-p.p.

Corrigé :
Première méthode : Soient f^+ et f^- respectivement les parties positive et négative de f, et les mesures positives $d\nu_+ = f^+ d\lambda$ et $d\nu_- = f^- d\lambda$. On a, pour tous $a < b$, $\nu_+(]a,b[) = \nu_-(]a,b[)$. Or ν_+ et ν_- sont des mesures boréliennes positives de masse finie, donc le théorème d'unicité des mesures implique $\nu_+ = \nu_-$. Ainsi,

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \int_A f\,d\lambda = 0.$$

En particulier,

$$\int_{\{f>0\}} f\,d\lambda = 0.$$

Or $f\mathbf{1}_{\{f>0\}}$ est une fonction positive donc $f\mathbf{1}_{\{f>0\}} = 0$ λ-p.p. De même, $f\mathbf{1}_{\{f<0\}} = 0$ λ-p.p. Donc $f = 0$ λ-p.p.

Deuxième méthode : On vérifie aisément que la classe des boréliens A tels que $\int_A f(x)\,\lambda(dx) = 0$ est une classe monotone (pour la stabilité par union croissante on peut utiliser le théorème de convergence dominée). Elle contient les intervalles ouverts, qui forment une classe stable par intersections finies engendrant la tribu borélienne. On a donc $\int_A f(x)\,\lambda(dx) = 0$ pour tout borélien A d'après le lemme de la classe monotone. On conclut comme dans la première méthode.

Exercice 2. Sur un espace mesuré σ-fini $(E,\mathscr{E},\mu)$, on considère $f\colon (E,\mathscr{E}) \to (\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable. Soit $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0) = 0$. Montrer que

$$\int_E g\circ f\,d\mu = \int_0^{+\infty} g'(t)\mu(\{f > t\})\,dt.$$

INDICATION : On pourra écrire $g(f(x))$ comme une intégrale.

Corrigé : La fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $g(0) = 0$ donc pour tout $x \in E$ on a

$$g(f(x)) = \int_0^{f(x)} g'(t)\,dt.$$

On a donc

$$\int_E g\circ f\,d\mu = \int_E \int_{\mathbb{R}_+} g'(t)\mathbf{1}_{\{t<f(x)\}}\,dt\,d\mu(x).$$

Et la fonction mesurable $F\colon (x,t) \in E\times\mathbb{R}_+ \mapsto g'(t)\mathbf{1}_{\{t<f(x)\}}$ est positive. Donc d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives (Fubini–Tonelli), on a

$$\int_E g\circ f\,d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} g'(t)\int_E \mathbf{1}_{\{t<f(x)\}}\,d\mu(x)\,dt = \int_{\mathbb{R}_+} g'(t)\mu(\{f > t\})\,dt.$$

Exercice 3 (Volume de la boule unité)**.** Soit λ_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $r > 0$, on pose

$$B_n(0,r) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2\},$$

qui est la boule fermée de centre 0 et de rayon r. Vérifier que

$$\lambda_n(B_n(0,1)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Corrigé : Voir le polycopié de cours.

Exercice 4 (Calculs...)**.**

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(x,y) = 0 \text{ si } x = y = 0.$$

   Calculer alors

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x,y) \text{ et } \int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x,y).$$

   Étonnant, non ?

2. En considérant l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\, dx\, dy,$ calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\, dx.$

3. En remarquant que $x^{-1}\sin(x) = \int_0^1 \cos(xy)\, dy$, calculer pour tout $t > 0$ l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} x^{-1} \sin(x)\, e^{-tx}\, dx.$$

   Ensuite, justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$

Corrigé :

1. À x fixé, en remarquant que $y/(x^2+y^2)$ est une primitive de $(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$, on a

$$\int_0^1 dy f(x,y) = \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{1+x^2}.$$

   Donc $\int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x,y) = \frac{\pi}{4}$ et par symétrie $\int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x,y) = -\frac{\pi}{4}$. De ce fait le théorème de Fubini ne s'applique pas, car f n'est pas dans $\mathscr{L}^1([0,1]^2)$.

2. Notons $F(x,y) = ((1+y)(1+x^2y))^{-1}$ pour tout $x, y \geq 0$. On a, d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} F(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{dy}{1+y} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dx}{1+x^2y} \right) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{dy}{(1+y)} \frac{\pi}{2\sqrt{y}} = \pi \int_{\mathbb{R}_+} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{2},$$

   et

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} F(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} F(x,y)\, dy \right) dx.$$

Or pour tout $x > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} F(x,y)\,dy = \frac{1}{x^2-1}\int_{\mathbb{R}_+}\left(\frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y}\right)dy = \frac{2\ln(x)}{x^2-1}.$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

3. Posons $G(x,y) = \cos(xy)\exp(-tx)$ pour $x \geq 0$, $y \in [0,1]$ et $t > 0$. On a $|G(x,y)| \leq \exp(-tx)$ et $(x,y) \mapsto \exp(-tx)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives. Donc G est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ et d'après le théorème de Fubini pour les fonctions intégrables,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(x)}{x}e^{-tx}\,dx &= \int_{\mathbb{R}_+\times[0,1]} G(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}_+} \cos(xy)e^{-tx}\,dx\right)dy \\
&= \int_0^1 \frac{t}{y^2+t^2}\,dy \\
&= \arctan\left(\frac{1}{t}\right).
\end{aligned}$$

On rappelle la notation

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \lim_{C\to\infty}\int_0^C \frac{\sin(x)}{x}dx.$$

En effet, la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit $C > 0$ (très grand), le théorème de convergence dominée montre que

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_0^C \frac{\sin(x)}{x}e^{-tx}dx = \int_0^C \frac{\sin(x)}{x}dx.$$

De plus, quand $t \leq 1$, des intégrations par parties (on intègre le sinus) donnent

$$\begin{aligned}
\left|\int_C^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx\right| &\leq \frac{2}{C} \\
\left|\int_C^\infty \frac{\sin(x)}{x}e^{-tx}dx\right| &\leq \frac{4}{C}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \lim_{t\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(x)}{x}e^{-tx}\,dx = \lim_{t\downarrow 0}\arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 5 (Intégration par parties)**.** Soit $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante continue à droite. On note dF sa mesure de Stieljes. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $\int_{]a,b]} |g(x)|dx < \infty$. Pour tout $x \in]a,b]$, on pose $G(x) = \int_{]a,x]} g(t)dt$. Alors on a

$$F(b)G(b) = \int_{]a,b]} F(t)g(t)dt + \int_{]a,b]} G(t)dF(t).$$

Corrigé : Voir le polycopié de cours.

Exercice 6 (L'escalier du diable)**.** On définit une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\geq 0}$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$:

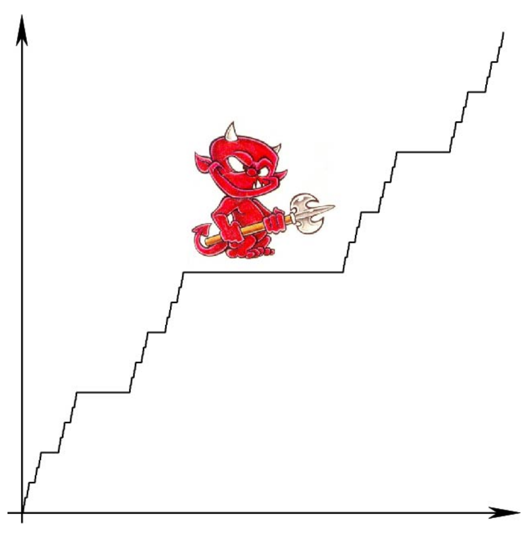
- Pour $x \in [0,1]$, $f_0(x) = x$.
- La fonction f_1 est la fonction affine par morceaux qui vaut 0 en 0, 1 en 1, et $\frac{1}{2}$ sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.
- On passe de même de f_n à f_{n+1} en remplaçant f_n sur chaque intervalle $[u,v]$ où elle n'est pas constante, par la fonction affine par morceaux qui vaut $\frac{f_n(u)+f_n(v)}{2}$ sur $\left[\frac{2u+v}{3}, \frac{2v+u}{3}\right]$.

On note K l'ensemble de Cantor triadique défini par $K = \left\{ \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n} : (a_n)_{n\geq 1} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}^*} \right\}$. Rappelons que K est un compact de $[0,1]$ non dénombrable d'intérieur vide, et de mesure de Lebesgue nulle (voir l'exercice 8 du TD 2).

1. Dessiner f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une fonction $f\colon [0,1] \to [0,1]$ continue croissante.
3. Montrer que si $]a,b[\subset K^c$ alors f est constante sur $]a,b[$.
4. En déduire que f est presque partout dérivable de dérivée nulle.
5. On note *df* la mesure de Stieljes associée à f. Que dire de *df* ? Quel est son support (voir l'exercice 10 du TD 2) ?

Corrigé :

1. Je vous laisse juger de vos talents artistiques.



2. On vérifie que $\|f_n - f_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$. Donc la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy pour la norme $\|\|_\infty$. Par complétude de $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\|_\infty)$ il existe une fonction f continue telle que $f_n \to f$ au sens de $\|\|_\infty$. La fonction f est croissante comme limite de fonctions croissantes.

3. Par construction de f.

4. La fonction f est constante sur chaque composante connexe de l'ouvert K^c donc f est dérivable de dérivée nulle sur K^c. Or $\lambda(K) = 0$. Ainsi f est dérivable de dérivée nulle λ-p.p.

5. De plus, la fonction f est continue et croissante, on peut donc considérer sa mesure de Stieljes df. Comme f est continue, df n'a pas d'atome. Et f est constante sur chaque composante connexe de l'ouvert K^c donc df est portée par K, df est donc singulière par rapport à λ.

Exercice 7. On se donne deux mesures positives boréliennes μ et ν sur $\mathbb{R}$, et on suppose que pour tout choix de $a < b \in \mathbb{R}$

$$\mu(]a, b[) \leq \nu(]a, b[) < \infty.$$

Montrer alors que $\mu(A) \leq \nu(A)$ pour tout borélien A.

Corrigé : Tout d'abord, on remarque que $\mu(]a, b[) \leq \nu(]a, b[)$ si $a, b \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$. Pour le voir, on peut par exemple utiliser la sigma additivité de μ et ν.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrons que $\mu(O) \leq \nu(O)$. Il existe une suite d'intervalles $(]a_n, b_n[)_{n\geq 1}$, avec $a_n, b_n \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ telle que

$$O = \bigcup_{n\geq 0}]a_n, b_n[$$

où l'union est disjointe. Ainsi

$$\mu(O) = \sum_{n\geq 0} \mu(]a_n, b_n[) \leq \sum_{n\geq 0} \nu(]a_n, b_n[) = \nu(O).$$

Puis, les mesures finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ étant régulières extérieurement, on a pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O);\ A \subset O, O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\} \leq \inf\{\nu(O);\ A \subset O, O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\} = \nu(A).$$

Exercice 8 ($\star$). Trouver deux parties $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telles que $\lambda(A) = \lambda(B) = 0$ et

$$A + B := \{a + b, a \in A, b \in B\} = \mathbb{R}.$$

Corrigé : On pose

$$A_1 := \{x \in [0, 1[\text{ dont le développement dyadique a tous ses coefficients d'indice pair nuls}\},$$

$$B_1 := \{x \in [0, 1[\text{ dont le développement dyadique a tous ses coefficients d'indice impair nuls}\}.$$

Alors A_1 et B_1 sont boréliens et $\lambda(A_1) \leq 2^{-n}$ pour tout $n \geq 0$. Donc $\lambda(A_1) = 0$ et similairement $\lambda(B_1) = 0$ et de plus $[0, 1[\subset A_1 + B_1$. Les ensembles $A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_1 + k$ et $B = \sum_{k\in\mathbb{Z}} B_1 + k$ répondent à la question.

On peut se demander s'il existe un ensemble mesurable A de mesure positive, qui est "équitablement réparti" sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\exists r \in]0, 1[\,, \forall J \text{ intervalle ouvert}, \lambda(A \cap J) = r\lambda(J).$$

L'exercice suivant donne une réponse à cette question (et même plus !).

Exercice 9 ($\star$). Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesure strictement positive.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle $J =]a, b[$ non trivial tel que
$$\lambda(A \cap J) \geq (1 - \varepsilon)\lambda(J).$$
Répondre à la question posée avant l'exercice.

2. En déduire qu'il existe ε tel que
$$[-\varepsilon, \varepsilon] \subset A - A := \{x - y, x \in A, y \in A\}.$$

Corrigé :

1. On peut supposer que $0 < \lambda(A) < \infty$ et que $\varepsilon < 1$. Puisque la mesure de Lebesgue est régulière, on peut trouver un ouvert $O = \bigsqcup_{n\geq 0}]a_n, b_n[$ (où l'union est disjointe) tel que $A \subset O$ et $\lambda(O) \leq \frac{\lambda(A)}{1-\varepsilon}$. Puisque $\lambda(A) \leq \sum_{n\geq 0} \lambda(A\cap]a_n, b_n[)$, il existe nécessairement n_0 tel que
$$(1 - \varepsilon)\lambda\big(]a_{n_0}, b_{n_0}[\big) \leq \lambda\big(A\cap]a_{n_0}, b_{n_0}[\big).$$
On voit ainsi que pour certains intervalles ouverts, l'ensemble A est très "dense". Donc, les seuls ensembles mesurables "équitablement répartis" sur $\mathbb{R}$ sont de densité nulle ou 1.

2. Soit J un intervalle ouvert tel que $\lambda(A \cap J) \geq \frac{3}{4}\lambda(J)$. Si $|x| < \frac{\lambda(J)}{2}$, alors $(x + J) \cup J$ est un intervalle de longueur strictement inférieure à $\frac{3}{2}\lambda(J)$, et il contient $A \cap J$ et $x + (A \cap J)$. Les deux ensembles $A \cap J$ et $x + (A \cap J)$ ne sont pas disjoints car
$$\lambda(x + (A \cap J)) = \lambda(A \cap J) \geq \frac{3}{4}\lambda(J).$$
On peut donc écrire tout $|x| < \frac{\lambda(J)}{2}$ comme différence de deux éléments de A.

Exercice 10. On définit une fonction $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ par

- $\mu(A) = 0$ si A est une partie finie ou dénombrable,
- $\mu(A) = +\infty$ sinon.

Soit K l'ensemble de Cantor triadique défini par $K = \left\{ \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n} \colon (a_n)_{n\geq 1} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}^*} \right\}$. On rappelle que K est un compact de $[0, 1]$, infini non-dénombrable et de mesure de Lebesgue nulle (voir l'exercice 8 du TD 2). On pose $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon x - y \in K\}$.

1. Vérifier que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.
2. Montrer que $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
3. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_C(x, y)\, \mu(dy) \Big)\, dx$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_C(x, y)\, dx \Big)\, \mu(dy)$. Conclure.

Corrigé :

1. L'ensemble vide $\varnothing$ est considéré comme fini donc $\mu(\varnothing) = 0$. Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite de parties de $\mathbb{R}$ disjointes finies ou dénombrables alors $\cup_{n\geq 0} A_n$ est finie ou dénombrable et donc
$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = 0 = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n).$$
Si $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est une suite dont au moins une des parties est infinie non-dénombrable alors $\cup_{n\geq 0} A_n$ est infinie non-dénombrable et donc
$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = +\infty = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n).$$

2. L'ensemble K est compact donc C est fermé. Ainsi $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

3. On a
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_C(x, y)\, \mu(dy) \right)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \mu(x - K)\, dx = +\infty,$$
car $x - K$ est non-dénombrable et
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_C(x, y)\, dx \right)\, \mu(dy) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(K + y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \lambda(K)\, dy = 0.$$
On a ici un exemple où le théorème de Fubini pour les fonctions positives ne s'applique pas, la mesure μ n'est pas σ-finie.