PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 5
MARTINGALES - CONVERGENCE PS

Exercice 1 (Une preuve de la loi du 0-1 de Kolmogorov par la théorie des martingales)**.**
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On définit: $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, $\mathcal{F}^n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$ et leurs limites $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\right)$ et $\mathcal{F}^\infty = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}^n$.

Soit $A \in \mathcal{F}^\infty$. Montrer, en utilisant la martingale $(M_n, n \geq 1)$ définie par $M_n = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n]$ pour $n \geq 1$, que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

Correction : On vérifie facilement que (M_n) est bien une martingale: pour tout n, M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable par définition de l'espérance conditionnelle, M_n est intégrable car borné par 1, et

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n$$

car $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. C'est une martingale fermée, i.e., $M_n = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$ pour une variable aléatoire Z intégrable (ici $Z = \mathbb{1}_A$) - ce qui est équivalent au fait d'être uniformément intégrable -, donc elle converge p.s. et dans L^1 vers $M_\infty = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_\infty)$. D'une part $\mathcal{F}^\infty \subset \mathcal{F}_\infty$ donc $M_\infty = \mathbb{1}_A$ p.s., d'autre part pour tout n, $\mathcal{F}_n$ est indépendante de $\mathcal{F}^\infty$ donc $M_n = \mathbb{P}(A)$ p.s., donc on obtient

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{P}(A) \qquad p.s.,$$

ce qui signifie que $\mathbb{P}(A)$ vaut 0 ou 1.

Exercice 2 (L'urne de Polya)**.**
À l'instant 0, une urne contient a boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule et on la remplace par deux boules de la même couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 1. On répète ce procédé.

Pour $n \geq 1$, on note Y_n et $X_n = \frac{Y_n}{N_0+n}$ respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

1. Donner $\mathbb{P}\left[Y_{n+1} = Y_n + 1|\mathcal{F}_n\right]$ et $\mathbb{P}\left[Y_{n+1} = Y_n|\mathcal{F}_n\right]$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire, que l'on note U, et montrer que pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[U^k]$.

2. *Cas* $a = b = 1$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, Y_n suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n+1\}$. En déduire la loi de U.

3. *Cas général.* On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$:
$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n+1)\ldots(Y_n+k-1)}{(N_0+n)(N_0+n+1)\ldots(N_0+n+k-1)}.$$
Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[U^k]$.

4. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ (on exhibera le développement en série entière). En déduire qu'on a caractérisé la loi de U.

Correction :

1. On a
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1|\mathcal{F}_n) \;=\; \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\text{la } n^{ieme} \text{ boule tirée est blanche}\}}|\mathcal{F}_n) \;=\; X_n$$
et de même
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n|\mathcal{F}_n) \;=\; 1 - X_n\,.$$
Pour tout $n \geq 1$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $X_n \in [0,1]$ donc est intégrable et
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{Y_n+1}{N_0+n+1}\mathbb{1}_{\{Y_{n+1}=Y_n+1\}}|\mathcal{F}_n\right) + \mathbb{E}\left(\frac{Y_n}{N_0+n+1}\mathbb{1}_{\{Y_{n+1}=Y_n\}}|\mathcal{F}_n\right) \\
&= \frac{Y_n+1}{N_0+n+1}\mathbb{P}\left(Y_{n+1}=Y_n+1|\mathcal{F}_n\right) + \frac{Y_n}{N_0+n+1}\mathbb{P}\left(Y_{n+1}=Y_n|\mathcal{F}_n\right) \\
&= \frac{Y_n+1}{N_0+n+1}X_n + \frac{Y_n}{N_0+n+1}(1-X_n) = \frac{X_n+Y_n}{N_0+n+1} = X_n\,,
\end{aligned}$$
donc $(X_n, n \geq 0)$ est une martingale. Étant positive (ou bornée dans $\mathbf{L}^1$, les deux arguments fonctionnent), elle converge p.s. vers une v.a. U. De plus, $(X_n, n \geq 1)$ est à valeurs dans $[0,1]$ donc d'après le théorème de convergence dominée, pour tout $k \geq 1$,
$$\mathbb{E}(X_n^k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(U^k).$$

2. On a immédiatement l'initialisation de la récurrence pour $n = 0$. Supposons que pour un $n \geq 2$ on sait que la loi de Y_{n-1} est la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$. Soit $k \geq 2$. Alors
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y_n = k] &= \mathbb{P}[Y_n = k \ et \ Y_{n-1} = k] + \mathbb{P}[Y_n = k \ et \ Y_{n-1} = k-1] \\
&= \mathbb{P}[Y_n = k|Y_{n-1} = k]\mathbb{P}[Y_{n-1} = k] + \mathbb{P}[Y_n = k|Y_{n-1} = k-1]\mathbb{P}[Y_{n-1} = k-1] \\
&= \frac{\mathbb{P}[\text{la } n\text{-ième boule prise est rouge } |Y_{n-1} = k]}{n} \\
&\quad + \frac{\mathbb{P}[\text{la } n\text{-ième boule prise est blanche}|Y_{n-1} = k-1]}{n} \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{n+1-k}{n+1} + \frac{1}{n}\cdot\frac{k-1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$
D'autre part
$$\mathbb{P}[Y_n = 1] = \mathbb{P}[\text{les } n \text{ boules tirées sont rouges}] = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\,.$$
On en déduit que Y_n suit bien une loi uniforme sur $\{1, ..., n+1\}$.

Il en découle que pour tout n, X_n suit une loi uniforme sur $\{1/(n+1), 2/(n+1), ..., (n+1)/(n+1)\}$. Or (X_n) converge p.s. donc en loi vers U, donc U suit une loi uniforme sur $[0,1]$ (limite des lois uniformes sur $\{1/(n+1), 2/(n+1), ..., (n+1)/(n+1)\}$ quand n tend vers l'infini).

3. Pour tout $n \geq 1$, Z_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $Z_n \in [0,1]$ donc est intégrable et

$$Z_{n+1} = \begin{cases} \frac{Y_n \dots (Y_n+k-1)}{(N_0+n+1)(N_0+n+2)\dots(N_0+n+k)} & \text{si } Y_{n+1} = Y_n \\ \frac{(Y_n+1)\dots(Y_n+k)}{(N_0+n+1)(N_0+n+2)\dots(N_0+n+k)} & \text{si } Y_{n+1} = Y_n + 1 \end{cases}$$

ou encore

$$Z_{n+1} = \begin{cases} Z_n \cdot \frac{N_0+n}{N_0+n+k} & \text{si } Y_{n+1} = Y_n \\ Z_n \cdot \frac{N_0+n}{N_0+n+k} \cdot \frac{Y_n+k}{Y_n} & \text{si } Y_{n+1} = Y_n + 1 \end{cases}.$$

Je vous laisse faire le calcul comme dans la question 1. pour montrer que Z_n est une martingale. En particulier, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_0] = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{N_0(N_0+1)\cdots(N_0+k-1)}$$

car $Y_0 = a$ (il y a a boules blanches à l'instant initial). De plus, $\mathbb{E}[Z_n]$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{Y_n^k + P_1(Y_n)}{n^k + P_2(n)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{Y_n^k}{n^k}\right] \frac{n^k}{n^k + P_2(n)} + \mathbb{E}\left[\frac{P_1(Y_n)}{n^k + P_2(n)}\right] \end{aligned}$$

où P_1 et P_2 sont des polynômes de degré $\leq k-1$. Puisque nous avons montré en 1. que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n^k) = \mathbb{E}(U^k)$, on en déduit que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(U^k)$, d'où pour tout $k \geq 1$

$$\mathbb{E}(U^k) = \mathbb{E}(Z_0) = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{N_0(N_0+1)\cdots(N_0+k-1)}.$$

4. Soit X une v.a. réelle bornée (on note $C \geq 0$ une constante telle que $|X| \leq C$ p.s.). Soit ϕ_X la fonction caractéristique de X, i.e., pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$. On a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 0} \frac{(itX)^n}{n!}\right].$$

Or on a

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(itX)^n}{n!} \xrightarrow[N\to\infty]{\text{p.s.}} \sum_{n\geq 0} \frac{(itX)^n}{n!}$$

et cette convergence est dominée par la constante $e^{|t|C}$. Donc par le théorème de convergence dominée on obtient

$$\phi_X(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n).$$

Comme U est à valeurs dans $[0,1]$, sa fonction caractéristique ϕ_U se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ comme décrit ci-dessus. Les moments de U, $(\mathbb{E}[U^k])_{k\geq 1}$ décrivent donc complètement la fonction caractéristique de U, qui elle même caractérise la loi de U. Pour votre culture, cette loi est la loi $\beta(a,b)$ de densité

$$B(a,b)^{-1}u^{a-1}(1-u)^{b-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(u)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Je laisse aux élèves motivés le soin de calculer tous les moments de la loi $\beta(a,b)$ et de vérifier que ce sont les mêmes que ceux de U.

Exercice 3 (Théorème de Rademacher[1]**).**
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \qquad et \qquad Z_n = 2^n\left(f\left(X_n + 2^{-n}\right) - f(X_n)\right).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes:
$$\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma(X).$$
2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$ pour tout $n \geq 0$).
3. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, limite p.s. et dans L^1 de $(Z_n)_{n\geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne et bornée telle que $Z = g(X)$.
4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que p.s.:
$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)du.$$
5. Conclure que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)du$.

Correction :

1. On remarque que, pour $0 \leq k \leq n$, $X_k = 2^{-k}\lfloor 2^k X_n \rfloor$. On peut l'écrire très proprement, ou faire un dessin pour s'en convaincre... Ainsi, pour $0 \leq k \leq n$, X_k est $\sigma(X_n)$-mesurable. On en déduit que $\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n)$.

   De plus, pour tout $n \geq 0$, par définition de X_n, on sait que X_n est $\sigma(X)$-mesurable. Ainsi, on a l'inclusion
$$\bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) \subset \sigma(X).$$
   De plus, X_n converge p.s. vers X quand n tend vers l'infini, donc X est $\cap_n \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$-mesurable. Ainsi, on obtient l'inclusion réciproque
$$\sigma(X) \subset \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

[1] Dans cet exercice, on montre par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée.

2. Soit $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable continue. Alors h est bornée sur $[0,1]$ donc pour tout n, $h(X_n)$ est intégrable. On a, pour $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(h(X_{n+1})\mathbb{1}_{\{X_n = k2^{-n}\}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(h\left(k2^{-n}\right)\mathbb{1}_{\{X \in [k2^{-n},(2k+1)2^{-(n+1)}]\}}\right) \\
&\qquad + \mathbb{E}\left(h\left((2k+1)2^{-(n+1)}\right)\mathbb{1}_{\{X \in [(2k+1)2^{-(n+1)},(k+1)2^{-n}]\}}\right) \\
&= 2^{-(n+1)}h\left(k2^{-n}\right) + 2^{-(n+1)}h\left((2k+1)2^{-(n+1)}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(h(X_{n+1}) \mid X_n) = \frac{h(X_n)}{2} + \frac{h\left(X_n + 2^{-(n+1)}\right)}{2}.$$

Remarque: en fait ici X_{n+1} est lui aussi à valeurs discrètes, donc on peut aussi utiliser l'égalité:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(X_{n+1})|X_n) &= \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} \mathbb{E}(h(X_{n+1})\mathbb{1}_{X_{n+1}=l2^{-(n+1)}}|X_n) \\
&= \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} h(l2^{-(n+1)})\mathbb{P}(X_{n+1} = l2^{-(n+1)}|X_n)
\end{aligned}$$

pour se ramener a étudier uniquement les probabilités de la forme

$$\mathbb{P}(X_n = k2^{-n} \ et \ X_{n+1} = l2^{-(n+1)})$$

avec $0 \leq l \leq 2^{n+1} - 1$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$.

Pour tout $n \geq 0$, Z_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $|Z_n| \leq L$ donc Z_n est intégrable et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= 2^{n+1}\mathbb{E}\left[f(X_{n+1} + 2^{-(n+1)}) - f(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right] \\
&= 2^n\left[f(X_n + 2^{-(n+1)}) - f(X_n) + f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n + 2^{-(n+1)})\right] \\
&= Z_n,
\end{aligned}$$

donc $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale bornée par L.

3. D'après la question 2., $\sup_{n\geq 0}\mathbb{E}(|Z_n|) \leq L$, donc $(Z_n)_{n\geq 0}$ converge p.s. (c'est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^1$). On note Z sa limite. De plus, $|Z_n| \leq L$ p.s. pour tout $n \geq 0$. On peut donc utiliser le théorème de convergence dominée pour obtenir la convergence de $(Z_n)_{n\geq 0}$ vers Z dans L^1. Pour tout $n \geq 0$, Z_n est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ donc Z est mesurable par rapport à la tribu $\bigcap_{n\geq 0}\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$. D'après la question 1., Z est ainsi $\sigma(X)$-mesurable. Il existe donc une fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne telle que $Z = g(X)$. De plus, Z étant bornée par L, on peut choisir g bornée (en prenant $g \wedge L$ par exemple).

4. Soit $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. La variable $h(X)$ est donc intégrable. On a, pour $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$\mathbb{E}\left(h(X)\mathbb{1}_{\{X_n = k2^{-n}\}}\right) = \mathbb{E}\left(h(X)\mathbb{1}_{\{X \in [k2^{-n},(k+1)2^{-n}[\}}\right) = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} h(x)dx$$

et on en déduit que

$$\mathbb{E}(h(X) \mid X_n) = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} h(x)dx\,.$$

$(Z_n, n \geq 0)$ étant une $\mathcal{F}_n$-martingale convergeant p.s. et dans L^1 vers Z, on sait que $Z_n = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$ pour tout $n \geq 0$. On a donc p.s.

$$Z_n = \mathbb{E}(g(X)|X_n) = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u)du\,.$$

5. D'après la question 4., pour tout $n \geq 0$,

$$f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n) = \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u)du\,.$$

Donc, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n}) = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} g(u)du$$

puis, en sommant, pour tout $0 \leq k \leq 2^n$,

$$f(k2^{-n}) = f(0) + \int_0^{k2^{-n}} g(u)du\,.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(\lfloor x2^n \rfloor 2^{-n}) = f(0) + \int_0^{\lfloor x2^n \rfloor 2^{-n}} g(u)du$$

et en faisant tendre n vers l'infini, par continuité de f on obtient

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)du\,.$$

Exercice 4.

1. Trouvez un exemple de martingale qui n'est pas bornée dans $\mathbf{L}^1$.
2. Trouvez un exemple de martingale qui converge p.s. mais n'est pas bornée dans $\mathbf{L}^1$.
3. Trouvez un exemple de martingale qui converge p.s. vers $+\infty$.

Correction :

1. La marche aléatoire simple est un exemple. D'après le théorème central limite $\mathbb{P}(S_n \geq \sqrt{n}) \sim \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \geq 1)$ d'où $\mathbb{E}[|S_n|] \geq \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \geq 1)\sqrt{n}$ asymptotiquement.

2. L'idée est de modifier la marche (S_n) et la stopper à partir d'un certain rang (mais probablement grand). Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distributées telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Soit T une variable aléatoire indépendante des (X_i) telle que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(T = n) = cn^{-3/2}$ pour une constante $c > 0$ (pourquoi est-ce possible ?). On considère la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(T, X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $\mathcal{F}_0 = \sigma(T)$. Alors
$$\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n\wedge T} X_i$$
est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$. Intuitivement $\tilde{S}$ est une marche aléatoire simple, jusqu'au jour ou quelqu'un d'extérieur (la variable T) lui dit d'arrêter sa marche et de ne plus bouger. De plus
$$\mathbb{E}[|\tilde{S}_n|] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T = k)\mathbb{E}[|S_k|] \geq \sum_{k=1}^{n} c' \frac{\sqrt{n}}{n^{3/2}},$$
pour une bonne constante $c' > 0$. Puisque la série harmonique diverge la martingale $(\tilde{S}_n)$ n'est pas bornée dans $\mathbb{L}^1$. Il est évident qu'elle converge presque sûrement car $\tilde{S}_n = \tilde{S}_T$ pour tout $n \geq T$.

3. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère $(\xi_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que
$$\mathbb{P}(\xi_n = -n^2) = \frac{1}{n^2} \;\text{ et }\; \mathbb{P}\left(\xi_n = \frac{n^2}{n^2-1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$
On pose $M_n = \xi_2 + \ldots + \xi_n$ pour $n \geq 2$. Montrons que $(M_n)_{n\geq 2}$ est une martingale telle que $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} +\infty$. On pose pour $n \geq 2$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_2, \ldots, \xi_n)$. Pour tout $n \geq 2$, M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, bornée donc intégrable et ξ_{n+1} étant indépendante de $\mathcal{F}_n$, on a
$$\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\xi_{n+1}) + M_n = -\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} + \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2-1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + M_n = M_n.$$
$(M_n)_{n\geq 2}$ est donc une martingale.
Pour tout $n \geq 2$, posons $A_n = \{\xi_n = -n^2\}$. On a
$$\sum_{n\geq 2} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$
Donc, d'après le lemme de Borel-Cantelli, on obtient
$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq 2}\bigcup_{n\geq k} A_n\right) \;=\; 0\,.$$

Cela signifie que $\mathbb{P}$ p.s., il existe $n_0(\omega)$ tel que pour tout $n \geq n_0(\omega)$, l'événement A_n^c se produit, et $M_{n+1} \geq M_n + 1$. On en déduit que

$$M_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{p.s}}{\longrightarrow}} +\infty\,.$$

Exercice 5 (Variation quadratique)**.**
Soit $(M_n)_{n\geq 0}$, une martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ de carré intégrable, c'est à dire telle que $\mathbb{E}(M_n^2) < \infty$ pour tout $n \geq 0$. Dans cet exercice (comme dans le précédent), par U_n prévisible je veux simplement dire que pour tout n, U_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable, je ne suppose pas la bornitude.

1. Montrer qu'en posant $< M >_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$,

$$< M >_{n+1} = < M >_n + \mathbb{E}\left[M_{n+1}^2 - M_n^2 | \mathcal{F}_n\right]$$

   on définit un processus croissant (c'est à dire une suite croissante de variables aléatoires) et prévisible tel que $(M_n^2 - < M >_n)_{n\geq 0}$ est une martingale. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ un processus prévisible tel que$A_0 = 0$ p.s. Montrer que, si $(M_n^2 - A_n)_{n\geq 0}$ est une martingale,alors $< M >_n = A_n$ p.s. pour tout $n \geq 0$.

2. Soit $(C_n)_{n\geq 1}$ un processus prévisible borné. On rappelle que le processus $((C \bullet M)_n)_{n\geq 0}$ défini par $(C \bullet M)_0 := 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$(C \bullet M)_n := \sum_{k=1}^{n} C_k(M_k - M_{k-1})$$

   est une martingale (cf TD 4). Calculer $< (C \bullet M) >_n$ pour tout $n \geq 0$ (l'exprimer en fonction de $< M >$).

3. Soit T un temps d'arrêt. On rappelle que le processus M^T défini par $M_n^T = M_{T\wedge n}$ pour tout $n \geq 0$ est une martingale. Montrer que $< M^T >_n = < M >_{T\wedge n}$ p.s. pour tout $n \geq 0$.

Correction :

1. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe et $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable donc $(M_n^2)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale (cf question 1. de l'exercice précédent, simple conséquence de l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles). Ainsi, pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}(M_{n+1}^2 - M_n^2 | \mathcal{F}_n) \geq 0$. Cela entraîne que le processus $(< M >_n)_{n\geq 0}$ est croissant. On peut aussi le voir en calculant

$$\begin{aligned} < M >_{n+1} - < M >_n &= \mathbb{E}(M_{n+1}^2 - M_n^2 | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2 | \mathcal{F}_n) + 2M_n \mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) - 2M_n^2 \\ &= \mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2 | \mathcal{F}_n) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

   De plus, il est facile de vérifier que le processus $(< M >_n)_{n\geq 0}$ est prévisible. Enfin, pour tout $n \geq 0$, $M_n^2 - < M >_n$ est intégrable et $\mathcal{F}_n$-mesurable et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{n+1}^2 - < M >_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(M_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) - < M >_{n+1} \\ &= M_n^2 - < M >_n \end{aligned}$$

donc $(M_n^2 - < M >_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

Si $(M_n^2 - A_n)_{n\geq 0}$ est une martingale alors pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}(M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - A_{n+1} = \mathbb{E}(M_{n+1}^2 - A_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n^2 - A_n$$

c'est à dire

$$A_{n+1} = A_n + \mathbb{E}(M_{n+1}^2 - M_n^2|\mathcal{F}_n).$$

Comme $A_0 = 0$ p.s., on en déduit que $A_n =< M >_n$ p.s. pour tout $n \geq 0$.

2. On va utiliser deux fois la propriété suivante, vue dans la question 1. avec $< M >_n$, et qui est très souvent utile : si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, pour tout $n \geq 0$ on a

$$\mathbb{E}[X_{n+1}^2 - X_n^2|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2|\mathcal{F}_n]\,. \tag{1}$$

Pour tout $n \geq 0$ on obtient

$$\begin{aligned} < (C \bullet M) >_{n+1} - < (C \bullet M) >_n &= \mathbb{E}\left[(C \bullet M)_{n+1}^2 - (C \bullet M)_n^2|\mathcal{F}_n\right] \\ &= \mathbb{E}\left[((C \bullet M)_{n+1} - (C \bullet M)_n)^2\,|\mathcal{F}_n\right] \\ &= \mathbb{E}\left[C_{n+1}^2(M_{n+1} - M_n)^2|\mathcal{F}_n\right] \\ &= C_{n+1}^2\mathbb{E}(M_{n+1}^2 - M_n^2|\mathcal{F}_n) \\ &= C_{n+1}^2\,(< M >_{n+1} - < M >_n) \end{aligned}$$

Ainsi

$$< (C \bullet M) >_n = \sum_{k=1}^{n} C_k^2\,(< M >_k - < M >_{k-1})\,.$$

3. *Méthode 1:* Le processus $(M_n^2 - < M >_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et T est un temps d'arrêt donc $(M_{T\wedge n}^2 - < M >_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est une martingale. De plus par définition $< M >_{T\wedge 0} =< M >_0 = 0$. On vérifie finalement que le processus $(< M >_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est prévisible: pour tout $n \geq 1$,

$$< M >_{T\wedge n} = \sum_{i=1}^{n-1} < M >_i \mathbb{1}_{\{T=i\}} + < M >_n \mathbb{1}_{\{T\geq n\}}\,,$$

or pour tout i $< M >_i$ est $\mathcal{F}_{i-1}$-mesurable, $\{T = i\} \in \mathcal{F}_i$ et $\{T \geq n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$, donc $< M >_{T\wedge n}$ est bien $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable. Ainsi, d'après la question 1., $< M^T >_n =< M >_{T\wedge n}$ p.s. pour tout $n \geq 0$.

Méthode 2: On va utiliser la question 2, l'enjeu est de trouver le bon processus $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad C_n = \mathbb{1}_{\{T\geq n\}}\,.$$

En remarquant que $\{T \geq n\} = \{T \leq n-1\}^c$, on obtient que C_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$, et C_n est évidemment borné par 1, donc par la question 2. nous connaissons la forme de $< (C \bullet M) >_n$. Or on a

$$\begin{aligned} (C \cdot M)_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{T\geq k\}}(M_k - M_{k-1}) \\ &= (M_1 - M_0) + (M_2 - M_1) + \ldots + (M_{T\wedge n} - M_{(T\wedge n)-1}) \\ &= M_{T\wedge n} - M_0 = M_n^T - M_0\,. \end{aligned}$$

On va noter $Y_n = M_n^T - M_0$. Puisque $(M_n^T)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ sont des martingales, en utilisant la propriété (1) et le résultat de la question 2., on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
< M^T >_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(M_k^T - M_{k-1}^T)^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(Y_k - Y_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= < Y >_n \\
&= < (C \cdot M) >_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_k^2 (< M >_k - < M >_{k-1}) \\
&= < M >_{T\wedge n} - < M >_0 \\
&= < M >_{T\wedge n} \ .
\end{aligned}$$