PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 5
MARTINGALES - CONVERGENCE PS

Exercice 1 (Une preuve de la loi du 0-1 de Kolmogorov par la théorie des martingales)**.**
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On définit: $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $\mathcal{F}^n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ et leurs limites $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\right)$ et $\mathcal{F}^\infty = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}^n$.

Soit $A \in \mathcal{F}^\infty$. Montrer, en utilisant la martingale $(M_n, n \geq 1)$ définie par $M_n = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n]$ pour $n \geq 1$, que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 2 (L'urne de Polya)**.**
À l'instant 0, une urne contient a boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule et on la remplace par deux boules de la même couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 1. On répète ce procédé.

Pour $n \geq 1$, on note Y_n et $X_n = \frac{Y_n}{N_0+n}$ respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

1. Donner $\mathbb{P}[Y_{n+1} = Y_n + 1|\mathcal{F}_n]$ et $\mathbb{P}[Y_{n+1} = Y_n|\mathcal{F}_n]$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire, que l'on note U, et montrer que pour tout $k \geq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[U^k]$.
2. *Cas* $a = b = 1$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, Y_n suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n+1\}$. En déduire la loi de U.
3. *Cas général.* On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$:
$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n+1)\dots(Y_n+k-1)}{(N_0+n)(N_0+n+1)\dots(N_0+n+k-1)}.$$
Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[U^k]$.
4. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ (on exhibera le développement en série entière). En déduire qu'on a caractérisé la loi de U.

Exercice 3 (Théorème de Rademacher[1])**.**
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose
$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \qquad et \qquad Z_n = 2^n \left(f\left(X_n + 2^{-n}\right) - f(X_n)\right).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes:
$$\sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sigma(X_n) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma(X).$$

[1] Dans cet exercice, on montre par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée.

2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$ pour tout $n \geq 0$).

3. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, limite p.s. et dans L^1 de $(Z_n)_{n\geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne et bornée telle que $Z = g(X)$.

4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que p.s.:
$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)du\,.$$

5. Conclure que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)du$.

Exercice 4.

1. Trouvez un exemple de martingale qui n'est pas bornée dans $\mathbf{L}^1$.

2. Trouvez un exemple de martingale qui converge p.s. mais n'est pas bornée dans $\mathbf{L}^1$.

3. Trouvez un exemple de martingale qui converge p.s. vers $+\infty$.

Exercice 5 (Variation quadratique)**.**
Soit $(M_n)_{n\geq 0}$, une martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ de carré intégrable, c'est à dire telle que $\mathbb{E}(M_n^2) < \infty$ pour tout $n \geq 0$. Dans cet exercice (comme dans le précédent), par U_n prévisible je veux simplement dire que pour tout n, U_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable, je ne suppose pas la bornitude.

1. Montrer qu'en posant $< M >_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$,
$$< M >_{n+1} = < M >_n + \mathbb{E}\left[M_{n+1}^2 - M_n^2|\mathcal{F}_n\right]$$
on définit un processus croissant (c'est à dire une suite croissante de variables aléatoires) et prévisible tel que $(M_n^2 - < M >_n)_{n\geq 0}$ est une martingale. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ un processus prévisible tel que$A_0 = 0$ p.s. Montrer que, si $(M_n^2 - A_n)_{n\geq 0}$ est une martingale,alors $< M >_n = A_n$ p.s. pour tout $n \geq 0$.

2. Soit $(C_n)_{n\geq 1}$ un processus prévisible borné. On rappelle que le processus $((C \bullet M)_n)_{n\geq 0}$ défini par $(C \bullet M)_0 := 0$ et pour tout $n \geq 1$,
$$(C \bullet M)_n := \sum_{k=1}^{n} C_k(M_k - M_{k-1})$$
est une martingale (cf TD 4). Calculer $< (C \bullet M) >_n$ pour tout $n \geq 0$ (l'exprimer en fonction de $< M >$).

3. Soit T un temps d'arrêt. On rappelle que le processus M^T défini par $M_n^T = M_{T\wedge n}$ pour tout $n \geq 0$ est une martingale. Montrer que $< M^T >_n = < M >_{T\wedge n}$ p.s. pour tout $n \geq 0$.