

Td n° 5 d'Analyse fonctionnelle

ESPACES L^1 ET L^∞

Séance du 9 mars 2012

Exercice 1. Théorème de représentation sur $(L^1)'$

Le but de cet exercice est de montrer que $(L^1)'$ peut être identifié à L^∞ . On se donne $\phi \in (L^1(\Omega))'$. On veut donc montrer qu'il existe $u \in L^\infty(\Omega)$ tel que

$$\langle \phi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^1,$$

et de plus $\|u\|_{L^\infty} = \|\phi\|_{(L^1)'}$.

1. On fixe $w \in L^2(\Omega)$ tel que pour tout K compact de Ω , $w \geq \epsilon_K > 0$. Construire u à l'aide de w .

Indication : On pourra utiliser le théorème de représentation dans L^2 .

2. Soit $C > \|\phi\|_{(L^1)'}$. Montrer que l'ensemble $A = \{x \in \Omega, |u(x)| > C\}$ est négligeable. Conclure.

3. Attention ! La réciproque est fautive. Construire une forme linéaire sur $(L^\infty)'$ qui ne peut pas se représenter sous la forme $\langle \phi, f \rangle = \int u f$ avec $u \in L^1$.

★

Exercice 2. L^∞ n'est pas séparable

1. Soit E un espace topologique. On suppose qu'il existe une famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que
 - pour tout $i \in I$, O_i est un ouvert non vide de E ,
 - $O_i \cap O_j = \emptyset$ si $i \neq j$,
 - I n'est pas dénombrable.

Montrer que E n'est pas séparable

2. En déduire que L^∞ n'est pas séparable.

★

Exercice 3. Uniforme intégrabilité

Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d et \mathcal{F} une partie bornée de $L^1(\Omega)$. On dit que \mathcal{F} est uniformément intégrable si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta$ tel que

$$\text{mes}(A) \leq \delta \Rightarrow (\forall f \in \mathcal{F}, \int_A f \leq \epsilon).$$

1. Montrer que \mathcal{F} est uniformément intégrable si et seulement si

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f| \geq M\}} |f| \rightarrow 0 \text{ quand } M \rightarrow +\infty. \quad (1)$$

2. Montrer que \mathcal{F} est uniformément intégrable si et seulement s'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ croissante telle que $g(t)/t \rightarrow +\infty$ et

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\Omega} g(|f(x)|) dx < +\infty.$$

★

Exercice 4. *Théorème de Dunford-Pettis*

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Le but de cet exercice est de montrer que pour toute suite $f_n \in L^1(\Omega)$ bornée, on peut en extraire une sous suite qui converge pour la topologie faiblement $\sigma(L^1, L^\infty)$ si et seulement si la famille $\{f_n\}$ est équiintégrable.

On considère dans un premier temps une suite de fonctions $f_n \in L^1(\Omega)$ bornée et équiintégrable. On peut supposer $f_n \geq 0$ pour tout n .

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose $f_n^k = f_n \chi_{\{f_n \leq k\}}$. Montrer que $\sup_n \|f_n - f_n^k\| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$.

2. Montrer que pour tout k , on peut extraire de $(f_n^k)_k$ une suite qui converge faiblement pour $\sigma(L^1, L^\infty)$. On note f^k la limite.

3. Montrer que f^k converge fortement dans L^1 . On note f sa limite.

Indication : On pourra utiliser le théorème de Beppo-Levi.

4. Montrer que l'on peut extraire de f_n une sous suite qui converge faiblement pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers f .

On montre maintenant la réciproque. Soit f_n une suite de $L^1(\Omega)$ convergeant faiblement vers f . Notons \mathfrak{X} l'ensemble des fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables de Ω . On introduit les ensembles :

$$X_n := \left\{ 1_A \in \mathfrak{X}, \forall k \geq n, \left| \int_A (f_k(x) - f(x)) dx \right| \leq \varepsilon \right\}.$$

5. Montrer que \mathfrak{X} et X_n sont des fermés (forts) de L^1 .

6. Utiliser le théorème de Baire, et montrer que (f_n) est nécessairement uniformément intégrable.

★

Exercice 5. *Limite de produits*

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n .

1. Théorème d'Egorov. Soit $f_n \in L^\infty$ telle que $f_n \rightarrow f$ presque partout. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une partie mesurable A de Ω telle que $mes(\Omega \setminus A) \leq \epsilon$ et f_n converge uniformément sur A .

Indication : On pourra considérer les $E_{n,k} = \cap_{m \geq n} \{x \in \Omega, |f(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{k}\}$.

2. Soient g_n suite bornée de $L^\infty(\Omega)$ telle que $g_n \rightarrow 0$ presque partout, et f_n suite de $L^1(\Omega)$ telle que $f_n \rightharpoonup f$ dans $\sigma(L^1, L^\infty)$, avec $f \in L^1(\Omega)$. Montrer que $f_n g_n \rightarrow 0$ fortement dans $L^1(\Omega)$.

★