Td n° 5 d'Analyse fonctionnelle

Valeurs propres du Laplacien de Dirichlet

Séance du 13 Mars 2015

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$. Dans ce TD, on introduit l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme étant le complété des fonctions C^∞ à support compact dans Ω pour la norme

$$\|u\|_{H_0^1} = \left(\int u^2 + |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En particulier, H_0^1 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$< u, v >= \int_\Omega uv + \nabla u . \nabla v.$$

On admettra que si Ω est borné, l'inclusion de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

Exercice 1. *Inégalité de Poincaré*

1. Soit $u \in C_c^\infty(]a, b[)$. Montrer que

$$\|u\|_{L^2([a,b])} \leq 2|b-a| \|u'\|_{L^2([a,b])}.$$

2. Soit $\Omega =]a, b[\times \mathbb{R}^d$. En déduire que pour $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 2|b-a| \|\nabla u\| L^2(\Omega).$$

On admettra que cette inégalité reste vraie pour tout ouvert régulier, borné dans au moins une direction.

⋆

Exercice 2. *Diagonalisation du Laplacien de Dirichlet*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, borné et régulier.

1. En utilisant le théorème de Lax Milgram et le résultat de l'exercice précédent, montrer que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique $u \in H_0^1$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \int \nabla v . \nabla u = \int f v.$$

On dira alors que u est solution faible du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \text{ sur } \Omega \\ u = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

2. Montrer que l'opérateur $-\Delta^{-1} : L^2 \mapsto L^2$, qui à f associe la solution u définie précédemment est autoadjoint et compact.

3. Montrer qu'il existe donc une suite croissante $\lambda_n \to \infty$ et une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, notée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$.

⋆

Exercice 3. *Autour de la première valeur propre du Laplacien*

1. Montrer que $\sqrt{\lambda_1} = \inf_{u \in H_0^1, \|u\|_{L^2}=1} \|\nabla u\|_{L^2}$ En déduire que $1/\sqrt{\lambda_1}$ est la constante optimale dans l'inégalité de Poincaré, et que cet optimum est réalisé uniquement sur l'espace propre E_{λ_1} associé à λ_1.

2. Soit $g \in C^2(\bar{\Omega})$ telle que $-\Delta g \geq 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon < d(x, \partial\Omega)$,

$$\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} g(y)dy \leq g(x).$$

Indication : On pourra remarquer

$$\int_{B(0,r)} g = \frac{1}{2n} \int_{B(0,r)} g\Delta(|x|^2 - r^2),$$

calculer cette expression avec la formule de Stokes et montrer que $F : r \mapsto \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} g(y)dy$ est décroissante.

3. En déduire que si $g \in C^2(\bar{\Omega})$ est telle que $-\Delta g \geq 0$ et $g = 0$ sur $\partial\Omega$ alors soit $g > 0$ sur Ω, soit $g \equiv 0$.

4. En utilisant le théorème de Krein-Rutman, montrer que l'espace propre associé à la première valeur propre est de dimension 1 et qu'un vecteur propre e_1 associé à λ_1 est de signe constant.

Indication : On pourra admettre que les e_n sont C^∞ et considérer l'opérateur compact Δ^{-1} sur les fonctions continues qui s'annulent sur $\partial\Omega$.

⋆

Exercice 4. *Estimation de Weyl*

1. Principe du minimax : montrer que

$$\lambda_n = \min_{\substack{V \subset H_0^1, \\ \dim(V) \geq n}} \max_{\substack{u \in V, \\ \|u\|_{L^2}=1}} \|\nabla u\|^2.$$

2. En déduire que si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ sont deux ouverts connexes bornés, $\lambda_n(\Omega_2) \leq \lambda_n(\Omega_1)$. On note $N_\Omega(\lambda) = \#\{\lambda_n(\Omega) \leq \lambda\}$. Montrer que

$$N_{\Omega_2}(\lambda) \geq N_{\Omega_1}(\lambda).$$

3. Quelles sont les valeurs propres et les vecteurs propres associés quand $\Omega = [0,a]^d$?

Indication : On pourra utiliser la décomposition en série de Fourier, et/ou une technique de séparation des variables.

4. En déduire une estimation de $N_{[0,a]^d}(\lambda)$ quand $\lambda \longrightarrow \infty$.

5. En écrivant un ouvert borné Ω comme la limite d'ouverts constitués de petites briques $[0,a]^d$ avec a de plus en plus petit, montrer que

$$\liminf_{\lambda \longrightarrow \infty} \frac{N_\Omega(\lambda)}{\lambda^{\frac{d}{2}}} \geq |\Omega| \frac{c_d}{(2\pi)^d}$$

où c_d est le volume de la boule unité en dimension d.

⋆