Analyse Complexe TD 5 (13/03 - 16/03)

Exercice 1 Des résidus, I.

1. On écrit l'intégrale comme la limite de l'intégrale de $\Im e^{it}/t$ sur $[\epsilon, 1/\epsilon]$, quand $\epsilon \to 0$. Par argument d'intégration par parties, ou par un argument de séries alternées, on montre que l'intégrale converge effectivement. Ensuite, on considère le contour donné par un grand demi cercle centré en 0, de rayon $1/\epsilon$ dans $\{\Im z > 0\}$, un petit demi cercle, toujours centré en 0, de rayon ϵ, toujours dans $\{\Im z > 0\}$, et les segments horizontaux qui ferment le contour. L'intégrale le long de ce contour de e^{iz}/z est nulle, par le théorème des résidus.
   Quand $\epsilon \to 0$, l'intégrale sur le grand demi-cercle tend vers 0, et celle sur le petit demi-cercle tend vers $-i\pi$. La partie imaginaire de l'intégrale sur les segments tend vers $\int_{\mathbb{R}} \sin t/t dt$. On en déduit donc que
$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

2. Il s'agit d'intégrer la fonction $\log_\pi(z-a)P(z)/Q(z)$ sur le contour *pac-man*. On trouve de la même façon que dans le cours :
$$\int_a^{+\infty} \frac{P}{Q}(x)dx = -\sum_{s\in\mathbb{C}\setminus[a,+\infty[} Res_s\left(\frac{P}{Q}(z)\log_\pi(z-a)dz\right)$$

3. On trouve $Q(z) = (z+2)(z+4)$. Les pôles de P/Q sont simples, donc il suffit de calculer $\log_\pi(z)/Q'(z)$ aux points -2 et -4. L'intégrale recherchée est donc
$$-\left[\frac{\log_\pi -2}{2} + \frac{\log_\pi -4}{-2}\right] = \frac{\log 2}{2}.$$

Exercice 2 Des résidus, II. Vérifiez que vous savez calculer les intégrales suivantes, théoriquement ... et pratiquement :

1. On a au moins deux façons de faire. On peut d'une part, utiliser $u = tant/2$, et exprimer $\cos t$, $\sin t$ comme des fractions rationnelles en u. On obtient alors que l'intégrale s'écrit comme l'intégrale d'une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$, ce que l'on sait a priori calculer.
   L'autre solution est d'utiliser la décomposition en exponentielles $e^{i\theta}$, et à se ramener à une intégrale sur le cercle. **1.** Pour
$$\int \frac{a}{a^2+\sin^2 t}dt$$
   on écrit (par exemple) $\sin t = (z-1/z)/(2i)$ pour $z = e^{it}$. On obtient
$$\int_{\mathbb{S}^1} \frac{4iaz}{(z^2-1)^2 - 4a^2z^2}dz$$
   C'est une fonction qui a deux pôles dans le disque unité, et ils sont simples. Ce sont $s_0 = a - \sqrt{1+a^2}$ et $-s_0 = \sqrt{1+a^2} - a$. La fonction que l'on considère est impaire. Il est aisé de constater que le résidu en s doit être égal au résidu en $-s$. Il suffit donc de calculer un seul résidu. L'intégrale recherchée est donc
$$2i\pi.2.Res_{s_0} = 4i\pi\frac{4ias_0}{(s_0-(a+\sqrt{1+a^2}))(4as_0)} = 4i\pi\frac{i}{-2\sqrt{1+a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1+a^2}}.$$
   2. Pour
$$\int \frac{1}{(a+\cos t)^2}dt \quad |a| > 1$$
   On recommence de la même façon. Cette fois-ci, il n'y a qu'un seul pôle dans le disque unité, mais c'est un pôle double.
$$-\int_{\mathbb{D}} \frac{4iz}{(z^2+2az+1)^2}dz$$
   Le pôle est $s_0 = a - \sqrt{a^2-1}$. On pose aussi $s_1 = a + \sqrt{a^2-1}$. On fait un DL autour de s_0. Pour ϵ assez petit, si la fonction sous l'intégrale est $f(z)$,
$$f(s_0+\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2}\frac{4is_0+4i\epsilon}{(s_0+\epsilon-s_1)^2} = \frac{4i}{\epsilon(s_0-s_1)^2}(s_0+\epsilon(1-\frac{2s_0}{s_0-s_1}) + o(\epsilon))$$

Le résidu est donc $-4i(s_0+s_1)/(s_0-s_1)^3$, et l'intégrale recherchée est

$$\frac{2\pi a}{\sqrt{a^2-1}^3}.$$

avec la détermination principale du logarithme.

2. **1.** On suppose que $\Re a > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+a^2} = \Re \int \frac{e^{ix}}{x^2+a^2} = 2i\pi \frac{e^{-a}}{2ia} = \frac{\pi e^{-a}}{a}.$$

2. Cette intégrale converge pour la même raison que celle de $\sin t/t$. On suppose que $\Re a > 0$, et

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} = \Im \int_{\mathbb{R}} \frac{xe^{ix}}{x^2+a^2} = \Im 2i\pi \frac{iae^{-a}}{2ia} = \pi e^{-a}.$$

Le fait que l'intégrale de la fonction sur un grand demi-cercle dans $\{\Im s > 0\}$ tend vers 0 s'obtient exactement comme pour e^{iz}/z.

3. Il y a un pôle double ! Pour $\xi < 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\imath\pi x\xi}}{(1+x^2)^2} = 2i\pi \frac{d}{dz} \frac{e^{i\pi|\xi|z}}{(z+i)^2}_{|z=i} = \frac{e^{-\pi|\xi|}}{2}(\pi|\xi|+1).$$

Comme c'est une fonction paire en ξ, cela règle tous les cas.

4.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} = 2i\pi \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{(z+i)^n}_{|z=i} = 2i\pi \binom{2n}{n}\frac{(-1)^n}{(2i)^{2n+1}} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

5. On utilise le fameux contour pacman avec la fonction $f = (\log_\pi x)^2/(x^2+a^2)$. Supposons que $a > 0$ On trouve que

$$\int_{\mathbb{R}+} \frac{-2i\pi \log x + 4\pi^2}{x^2+a^2} = 2i\pi \sum Res f(z)dz.$$

Autrement dit, si I est l'intégrale que l'on cherche

$$-2i\pi I + 4\pi^2 \times \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{a}\left((\log_\pi ia)^2 - (\log_\pi -ia)^2\right) = \frac{\pi}{a}(2\pi^2 - 2i\pi \log a).$$

Autrement dit,

$$I = \frac{\pi}{a}\log a.$$

3. Il s'agit d'intégrer sur une part de camenbert d'angle $2\pi/n$. Ainsi on fait le tour d'un pôle de la fonction $(e^{i\pi/n})$. Comme de plus $(e^{2i\pi/n}z)^n = z^n$, si I est l'intégrale recherchée, on trouve

$$I - e^{2i\pi(p+1)/n} I = 2i\pi \frac{x^p}{nx^{n-1}}_{|x=e^{i\pi/n}} = -\frac{2i\pi}{n} e^{i(p+1)\pi/n}$$

et

$$I = \frac{\pi}{n \sin(p+1)\pi/n}.$$

4. La fonction $h = \log_0 1 - 1/x$ est bien définie pour $x \notin [0,1]$. On considère alors l'intégrale de Ph/Q le long d'un contour qui fait le tour du segment $[0,1]$. La limite d'une telle intégrale quand le contour se rapproche du segment sera $-2i\pi \int P/Q$. Mais on comparer cette intégrale contre l'intégrale le long d'un très grand cercle. La différence sera la somme

$$2i\pi \sum Res \frac{hP}{Q}(z)dz. \tag{1}$$

L'intégrale le long du grand cercle va tendre vers 0 quand le rayon du cercle tend vers l'infini.

5. Comme $\sin \pi x$ ne s'annule pas dans $U_L = \{0 < Rex < 1\} \cap \{L > \Im x > 0\}$, on peut définir un logarithme du sinus sur cet ouvert. On intègre ce logarithme le long du contour ∂U_L. La divergence aux points 0 et 1 est logarithmique, donc intégrable. L'intégrale que l'on calcule est réelle, on peut donc prendre la partie réelle de l'intégrale sur le contour.
La contribution de l'intégrale le long de $[0,1]$ est l'intégrale que l'on cherche. Le long de $iL + [0,1]$, on trouve

$$\log 2 - \pi L + o(1). \tag{2}$$

Pour les intégrales verticales, on calcule la contribution :

$$\int_0^L \arg\sin(i\pi t) - \arg\sin(\pi(1+it))dt = k\pi L \tag{3}$$

où k est un entier. En effet, $\sin z + \pi = e^{i\pi}\sin z$. Comme la somme de ces contributions fait zéro, on doit trouver $k = 1$, finalement

$$\int_0^1 \log\sin\pi x dx = -\log 2. \tag{4}$$

Exercice 3 Beaucoup de Résidus !

1. Il y a une erreur d'énoncé. En effet, la formule n'est valable que si les pôles de f sont simples. On considère la fonction $h(z) = f(z)\pi\cot(\pi z)$. Elle est méromorphe sur $\mathbb{C}$, et ses pôles sont la réunion des entiers et des pôles de f. Aux entiers, les résidus sont les valeurs de f. En effet la cotangente a des pôles simples de résidu 1 à chaque élément de $\pi\mathbb{Z}$.
   De plus, d'après l'hypothèse sur f sur le bord du carré de l'énoncé, l'intégrale de h le long du bord de ce carré tend vers 0 quand $N \to +\infty$. On en déduit par la formule des résidus que

$$\sum f(n) + \sum_{y\in C\setminus\mathbb{Z}} Res_y h(z)dz = 0 \tag{5}$$

2. Ici, la fonction f n'a que 2 pôles, $\pm ia$. La borne le bord du carré est facile à obtenir. Pour le coup, les pôles sont simples, donc on peut écrire directement

$$\sum_{\mathbb{Z}} \frac{1}{a^2+n^2} = -\frac{\pi}{2ia}\mathrm{cotan}(\pi ia) + \frac{\pi}{2ia}\mathrm{cotan}(-\pi ia) = \frac{\pi}{a}\coth\pi a. \tag{6}$$

3. Au lieu d'utiliser la cotangente, on utilise le sinus, et on pose $h(z) = f(z)\pi/\sin(\pi z)$. Cette fois-ci, $f(x) = 1/(a+x)^2$, donc il a y un pôle double. On trouve

$$\sum_{\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(a+n)^2} = -\frac{d}{dz}\left\{\frac{\pi}{\sin\pi z}\right\}_{|z=-a} = \frac{\pi^2\cos\pi a}{(\sin\pi a)^2}. \tag{7}$$

Exercice 4 Voir le corrigé du partiel de l'année dernière.

Exercice 5 Voir aussi le corrigé de l'année dernière. Remarque : il y avait une erreur dans le TD, c'est $|f(z)| = O(\exp(|z|^{\rho+\varepsilon}))$ et non $|f(z)| = O(\exp(|z|\rho+\varepsilon))$