Td n° 5 d'EDP

Equations hyperboliques

Séance du 7 novembre 2014

Exercice 1. *Résolution par régularisation*

Soit a_t un symbole hyperbolique dépendant du temps. Soit $T > 0$, $s \in \mathbb{R}$, $u_0 \in H^s$ et $f \in C([0,T]; H^s)$. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons le problème de Cauchy

$$\partial_t u + Op(a_t) J_\varepsilon u = f, \quad u(0) = u_0 \tag{1}$$

où J_ε, appelé multiplicateur de Friedrichs, est défini par

$$\widehat{J_\varepsilon v}(\xi) = \chi(\varepsilon\xi)\widehat{v}(\xi),$$

où χ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, à support dans la boule de centre 0 et de rayon 2, et valant 1 sur la boule de centre 0 et de rayon 1.

1. Montrer que $Op(a_t)J_\varepsilon = Op(a_t^\varepsilon(x,\xi))$ où

$$a_t^\varepsilon(x,\xi) = a_t(x,\xi)\chi(\varepsilon\xi).$$

2. Montrer qu'il existe une unique solution $u_\varepsilon \in C^1([O,T], H^s)$ de (1).

3. Montrer que $(a_t^\varepsilon)^* - \bar{a}_t^\varepsilon + 2Re(a_t^\varepsilon)$ est borné dans S^0 uniformément en ε.

4. Montrer qu'il existe une constante C, dépendante de T, telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in [0,T]$, et toute fonction $v \in C^1([0,T]; H^s(\mathbb{R}^n))$,

$$\|v(t)\|_{H^s} \leq C\|v(0)\|_{H^s} + C\int_0^t \|(\partial_t v + Op(a^\varepsilon)v)(\tau)\|_{H^s}\, d\tau.$$

En déduire que u_ε est bornée dans H^s.

5. Montrer que u_ε est de Cauchy dans $C^0([0,T], H^{s-2})$.

6. Soit $s_1 < s_2$ deux nombres réels et $\sigma \in]s_1, s_2[$. Écrivons σ sous la forme $\sigma = \alpha s_1 + (1-\alpha)s_2$ avec $\alpha \in [0,1]$. Il existe une constante $C(s_1,s_2)$ telle que pour tout $u \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|u\|_{H^\sigma} \leq C(s_1,s_2)\|u\|_{H^{s_1}}^\alpha \|u\|_{H^{s_2}}^{1-\alpha}. \tag{2}$$

7. En déduire que (u_ε) est de Cauchy dans $C^0([0,T]; H^\sigma)$ pour $s-2 < \sigma < s$ et que u_ε converge dans $C^0([0,T]; H^\sigma) \cap C^1([0,T]; H^{\sigma-1})$ vers une limite notée u.

8. Montrer que $u \in C^0([0,T]; H^s) \cap C^1([0,T]; H^{s-1})$ et u est solution de l'équation

$$\partial_t u + Op(a_t)u = f, \quad u(0) = u_0.$$

⋆

Exercice 2. *Résolution d'un problème non linéaire*

On suppose dans tout l'exercice $s > \frac{d}{2}$.

1. Soit $u, v \in H^s$. Montrer que $uv \in H^s$ et

$$\|uv\|_{H^s} \leq C\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}.$$

Indication : On pourra montrer et utiliser l'inégalité

$$(1+|\xi|^2)^s \leq 4^s \left((1+|\xi-\eta|^2)^s + (1+|\eta|^2)^s\right).$$

ainsi que l'inégalité de Young

$$\|u * v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^1}\|v\|_{L^p}.$$

Soit a_t un symbole hyperbolique dépendant du temps. On veut résoudre le problème suivant, pour $u_0 \in H^s$

$$\partial_t u + Op(a_t)u = u^2, \quad u(0) = u_0. \tag{3}$$

Soit $T > 0$. Pour tout n, on se donne (grâce à l'exercice précédent) $u_{n+1} \in C^0([0,T]; H^s) \cap C^1([0,T]; H^{s-1})$ solution de l'équation

$$\partial_t u_{n+1} + Op(a_t)u_{n+1} = u_n^2, \quad u_{n+1}(0) = u_0.$$

2. Montrer qu'il existe C telle que si $T \leq \frac{C}{\|u_0\|_{H^s}}$, alors la suite u_n est bornée et de Cauchy dans $C^0([0,T]; H^s) \cap C^1([0,T]; H^{s-1})$.

3. En déduire l'existence d'une solution $u \in C^0([0,T]; H^s) \cap C^1([0,T]; H^{s-1})$ au problème (3).

⋆