4 Martingales (CV $\mathbb{L}^p$ et UI)

Exercice 4.1 (Série aléatoire). Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables indépendantes de Bernoulli de paramètre $1/2$, i.e. $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$ et α_n une suite de réels positifs. On considère la série

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i.$$

1. Montrer que si $\sum \alpha_i^2 < \infty$ alors S_n converge presque sûrement.
2. (*) Montrer que si $\sum \alpha_i^2 = \infty$ alors S_n oscille indéfiniement presque sûrement. On pourra considérer la martingale

Exercice 4.2 (Concentration autour de 0 et de 1.). On considère sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ une suite de v.a. $(X_n, n \geq 0)$ à valeurs dans $[0,1]$. On pose pour tout $n \geq 0$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. On suppose que $X_0 = a$ p.s. avec $a \in [0,1]$ et que

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = 1 - X_n \qquad et \qquad \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right) = X_n\,.$$

1. Montrer que pour tout n, $\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \text{ } ou \text{ } X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}\right) = 1$.
2. Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ est une $\mathscr{F}_n$-martingale qui converge p.s. et dans L^p pour tout $p \geq 1$ vers une v.a. Z.
3. Montrer que $\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2) = \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_n(1 - X_n))$.
4. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(Z(1-Z))$ puis la loi de Z.

Exercice 4.3 (Théorème de Kakutani). Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes positives de moyenne 1. Pour $n \geq 0$ on pose

$$M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k \qquad (M_0 = 1).$$

1. Montrer que (M_n) est une martingale qui converge p.s. vers M_∞.

On pose pour $n \geq 1$, $0 < a_n = \mathbb{E}[X_n^{1/2}] \leq 1$ et

$$N_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{X_k^{1/2}}{a_k} \qquad (N_0 = 1).$$

2. En utilisant le processus (N_n) montrer que les cinq conditions suivantes sont équivalentes
   (a) $\mathbb{E}[M_\infty] = 1$,
   (b) $M_n \to M_\infty$ dans $\mathbb{L}_1$ quand $n \to \infty$,

(c) la martingale (M_n) est uniformément intégrale,

(d) $\prod_{k=1}^{\infty} a_k > 0$,

(e) $\sum_{k=1}^{\infty}(1-a_k) < \infty$.

Montrer que si l'une des conditions précédentes n'est pas remplie alors $M_\infty = 0$ presque sûrement.

Exercice 4.4 (La loi du tout ou rien de Hewitt-Savage.). *Tiré du poly de J.-F. Le Gall.*

Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans un espace mesurable $(E,\mathscr{E})$. L'application $\omega \to (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots)$ définit une v.a. à valeurs dans l'espace produit $E^{\mathbb{N}^*}$, qui est muni de la tribu produit, la plus petite tribu rendant mesurable les applications coordonnées $(x_1, x_2, \ldots) \to x_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Une fonction mesurable F définie sur $E^{\mathbb{N}^*}$ est dite symétrique si

$$F(x_1, x_2, \ldots) = F(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots)$$

pour toute permutation π de $\mathbb{N}^*$ à support fini. On veut montrer que si F est une fonction symétrique sur $E^{\mathbb{N}^*}$, la variable aléatoire $Y := F(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ est constante p.s. Supposons, sans perte de généralité, que F est bornée, donc Y dans $\mathbb{L}^1$.

1. On pose $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\mathscr{G}_n = \sigma(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$, $X_n = \mathbb{E}[Y|\mathscr{F}_n]$ et $Z_n = \mathbb{E}[Y|\mathscr{G}_n]$. Que peut-on dire de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n assez grand tel que
$$\mathbb{E}[|X_n - Y|] \le \varepsilon \qquad et \qquad \mathbb{E}[|Z_n - \mathbb{E}(Y)|] \le \varepsilon\,.$$

2. Montrer qu'il existe une fonction mesurable $g : E^n \to \mathbb{R}$ telle que
$$\mathbb{E}[|F(\xi_1, \xi_2, \ldots) - g(\xi_1, \ldots, \xi_n)|] \le \varepsilon\,.$$
En déduire que
$$\mathbb{E}[|Z_n - g(\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{2n})|] \le \varepsilon\,.$$

3. Conclure.

4. Donner un exemple d'application qui ne peut pas être déduit de la loi du $0-1$ de Kolmogorov.