TD5 : Limites, polynômes

Diego Izquierdo

L'exercice 0 est à préparer avant la séance de TD. Nous traiterons les exercices dans l'ordre suivant : 0, 1, 2, 6, 5.

Exercice 0 (à préparer) : TD4
Faire les exercices 11, 16 et 12 du TD4.

Exercice 1 : TD4
Faire les questions 6 et 7 de l'exercice 14.

Exercice 2 : Calculs de limites
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n le groupe abélien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit p un nombre premier. Calculer $\varinjlim_n C_{p^n}$ dans les cas suivants :

1. les flèches de transition sont définies par

$$f_n : C_{p^n} \to C_{p^{n+1}}, 1 \mapsto p.$$

2. les flèches de transition sont définies par

$$f_n : C_{p^n} \to C_{p^{n+1}}, 1 \mapsto 5p.$$

3. les flèches de transition sont définies par

$$f_n : C_{p^n} \to C_{p^{n+1}}, 1 \mapsto 0.$$

Calculer $\varprojlim_p C_{p^n}$ dans les cas suivants :

4. les flèches de transition sont définies par

$$f_n : C_{p^{n+1}} \to C_{p^n}, 1 \mapsto 1.$$

5. les flèches de transition sont définies par

$$f_n : C_{p^{n+1}} \to C_{p^n}, 1 \mapsto p.$$

6. les flèches de transition sont définies par

$$f_n : C_{p^{n+1}} \to C_{p^n}, 1 \mapsto 0.$$

Exercice 3 : Exactitude de la limite inductive
Soient A un anneau et $(I, \leq)$ un ensemble ordonné. Soient $(M_i)_{i \in I}$, $(N_i)_{i \in I}$

et $(P_i)_{i\in I}$ des systèmes inductifs de A-modules. Un morphisme de systèmes inductifs $(f_i) : (M_i) \to (N_i)$ est une famille de morphismes $f_i : M_i \to N_i$ pour $i \in I$ qui commute avec les morphismes de transition. Soient $(f_i) : (M_i) \to (N_i)$ et $(g_i) : (N_i) \to (P_i)$ des morphismes de systèmes inductifs tels que, pour chaque $i \in I$, la suite $0 \to M_i \to N_i \to P_i \to 0$ est exacte. Montrer que les morphismes (f_i) et (g_i) induisent des morphismes $f : \varinjlim_i M_i \to \varinjlim_i N_i$ et $g : \varinjlim_i N_i \to \varinjlim_i P_i$ qui s'insèrent dans une suite exacte :

$$0 \to \varinjlim_i M_i \to \varinjlim_i N_i \to \varinjlim_i P_i \to 0.$$

Indications : Pour $i \leq j$, notons $u_{ij} : M_i \to M_j$, $v_{ij} : N_i \to N_j$ et $w_{ij} : P_i \to P_j$ les morphismes de transition des systèmes inductifs (M_i), (N_i) et (P_i). Le morphisme (f_i) induit un morphisme :

$$f : \bigoplus_i M_i \to \bigoplus_i N_i.$$

De plus, si i et j sont des éléments de I tels que $i \leq j$ et $x_i \in M_i$, alors :

$$f(x_i - u_{ij}(x_i)) = f_i(x_i - u_{ij}(x_i)) = f_i(x_i) - f_i(u_{ij}(x_i)) = f_i(x_i) - v_{ij}(f_i(x_i)).$$

Cela montre que f induit un morphisme :

$$f : \varinjlim_i M_i \to \varinjlim_i N_i.$$

De même, g induit un morphisme :

$$g : \varinjlim_i N_i \to \varinjlim_i P_i.$$

On vérifie immédiatement que g est surjectif et que $g \circ f = 0$.

Considérons $i \in I$ et $m \in M_i$. Alors, si $f(m) = 0 \in \varinjlim_i N_i$, il existe $j \geq i$ tel que $v_{ij}(f_i(m)) = 0$. Donc $f_i(u_{ij}(m)) = 0$, ce qui montre que $u_{ij}(m) = 0$ puisque f_i est nul. Par conséquent, m est nul dans $\varinjlim_i M_i$ et f est injective.

Soient maintenant $i \in I$ et $n \in N_i$ tel que $g(n) = 0 \in \varinjlim_i P_i$. Il existe $j \geq i$ tel que $w_{ij}(g_i(n)) = 0$. Donc $g_i(v_{ij}(n)) = 0$, ce qui prouve qu'il existe $m \in M_j$ tel que $f_j(m) = v_{ij}(n)$. Par conséquent, $f(m) = n$ et $n \in \mathrm{Im}(f)$.

Nous avons ainsi montré que la suite :

$$0 \to \varinjlim_i M_i \to \varinjlim_i N_i \to \varinjlim_i P_i \to 0$$

est exacte.

Exercice 4 : Exemples d'anneaux de polynômes

Soit A un anneau.

1. Montrer que $A[\mathbb{Z}]$ est isomorphe à $A[X,Y]/(XY-1)$.

> **Indications :** Pour toute A-algèbre B :
>
> $$\mathrm{Hom}_A(A[\mathbb{Z}],B) \cong \mathrm{Hom}_{groupes}(\mathbb{Z},\mathbb{B}^\times) \cong B^\times,$$
>
> $$\mathrm{Hom}_A(A[X,Y]/(XY-1),B) \cong \{(x,y)\in B^2 | xy=1\} \cong B^\times.$$
>
> Ainsi les A-algèbres $A[\mathbb{Z}]$ et $A[X,Y]/(XY-1)$ vérifient la même propriété universelle. Elles sont donc isomorphes.

2. Écrire la propriété universelle de $A[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$. Écrire $A[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ comme quotient de $A[X]$.

> **Indications :** Pour toute A-algèbre B :
>
> $$\mathrm{Hom}_A(A[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}],B) \cong \mathrm{Hom}_{groupes}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{B}^\times) \cong \mu_n(B),$$
>
> où $\mu_n(B)$ désigne le groupe des racines n-ièmes de l'unité de B. De plus, pour toute A-algèbre B :
>
> $$\mathrm{Hom}_A(A[X]/(X^n-1),B) \cong \{x\in B | x^n=1\} \cong \mu_n(B).$$
>
> Les algèbre $A[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ et $A[X]/(X^n-1)$ vérifient la même propriété universelle : elles sont donc isomorphes.

Exercice 5 : Anneaux de polynômes noethériens

1. Montrer que si M est un groupe abélien et P est un sous-groupe de M, alors tout caractère de P à valeurs dans $\mathbb{C}^\times$ s'étend en un caractère de M.

2. Soit $\mathcal{N}$ un groupe abélien. À quelle condition sur $\mathcal{N}$ l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[\mathcal{N}]$ est-il intègre ? Et noethérien ?

Exercice 6 : Points en géométrie algébrique

1. On considère les anneaux :

$$\mathbb{C}[X], \mathbb{R}[X]/(X^2+X+1), \mathbb{R}[X]/(X^3-6X^2+11X-6), \mathbb{R}[X]/(X^4-1).$$

Déterminer les morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres de ces anneaux à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

2. On considère l'anneau $\mathbb{R}[X]/(X^5)$. Déterminer les morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres de cet anneau à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

3. (a) Soit k un corps. Montrer qu'il existe une k-algèbre A telle que, pour chaque k-algèbre B, on ait une bijection $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(A,B) \cong B^\times$.

(b) Même question pour $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(A,B) \cong GL_n(B)$.

(c) Même question pour $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(A,B) \cong \mu_n(B)$ où $\mu_n(B)$ désigne l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans B.