Td n° 6 d'Analyse fonctionnelle

L'ÉQUATION DE HOPF

Séance du 22 mars 2013

Exercice 1. *Équation de conservation hyperbolique linéaire : méthode des caractéristiques*

On considère l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(t,x)\cdot\nabla_x u = 0, \quad x=(x_1,\dots x_n)\in\mathbb{R}^n, u(0)=u_0. \tag{$*$}$$

où $u : [0,\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et bornée. Soit $X = X(t,y)$ la solution de **l'équation des caractéristiques** :

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(t,y) = f(t,X(t,y)) \text{ dans } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ X(0,y) = y \text{ dans } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que pour tout $t\geq 0$, l'application $x\to X(t,x)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que si $u\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ est solution de $(*)$, alors $u(t,X(t,x)) = u_0(x)$ pour tout $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

3. En déduire la solution de classe $\mathcal{C}^1$ de l'équation $(*)$ en fonction de X.

4. **Principe de Duhamel** On s'intéresse maintenant à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f(t,x)\cdot\nabla_x u = h(t,x), \quad u(0)=0.$$

Montrer que $u(x,t) = \int_0^t v(s,t,x)ds$ est solution, où $v(s,t,x)$ est la solution de

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f(t,x)\cdot\nabla_x v = 0, \quad v(s,s,x) = h(s,x).$$

⋆

Exercice 2. *Formulation cinétique pour l'équation de Hopf*

On introduit une distribution microscopique de particules $f\equiv f(t,x,v)$ qui au temps t ont la position x et la vitesse v. La dynamique est décrite par l'équation cinétique

$$\partial_t f_\varepsilon + v\partial_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(\chi_{f_\varepsilon} - f_\varepsilon)$$
$$f_{\varepsilon|t=0} = f_0\in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$$

Ici et dans toute la suite, pour toute fonction $f\equiv f(t,x,v)$, on note χ_f la fonction définie par

$$\begin{cases} \chi_f(t,x,v) = 1 \text{ si } 0\leq v\leq \int f(t,x,w)dw \\ \chi_f(t,x,v) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

L'équation cinétique exprime donc une compétition entre le transport libre et un processus de relaxation vers l'équilibre thermodynamique local qui traduit l'effet global des collisions.

Dans la limite $\varepsilon \to 0$, on s'attend à ce que l'équilibre thermodynamique soit atteint presque partout $f_\varepsilon \sim \chi_{f_\varepsilon}$. En utilisant la conservation de la masse, on obtient alors que la masse limite $u = \int f dv$ devrait satisfaire l'équation de Hopf.

On commence par prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, l'équation cinétique a une unique solution globale.

1. En utilisant les caractéristiques du transport libre et la formule de Duhamel, montrer que les solutions f_ε de l'équation cinétique sont des points fixes de l'application T définie par

$$Tf(t,x,v) = f_0(x - vt, v)e^{-t/\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \chi_f(s, x - v(t-s), v)e^{-(t-s)/\varepsilon} ds\,.$$

2. Montrer que T est une application bornée et contractante sur $L^\infty([0,\tau], L^1(\mathbb{R}^2))$. En déduire que l'équation cinétique a une unique solution, définie globalement. Montrer de plus que la solution f_ε satisfait le principe du maximum

$$\|f(t)\|_\infty \leq e^{-t/\varepsilon}\|f_0\|_\infty + (1 - e^{-t/\varepsilon})\,.$$

3. *Propriété de monotonie.* Montrer que si $f_0 \leq \tilde{f}_0$, les solutions f et $\tilde{f}$ de l'équation cinétique avec données initiales respectives f_0 et $\tilde{f}_0$ satisfont $f \leq \tilde{f}$.

4. *Vitesse finie de propagation.* On suppose que $f_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ est à support compact. Montrer que la solution de l'équation cinétique $f(t)$ est à support compact en v, puis en déduire que $f(t)$ est à support compact.

Dans la limite $\varepsilon \to 0$, et pout $f_0 \in L^\infty$, les bornes uniformes sur (f_ε) assurent qu, à extraction près, on a convergence faible. Pour obtenir l'équation limite, on a besoin néanmoins de convergence forte.

5. *Régularité spatiale.* Montrer qu'on a l'estimation de propagation

$$\sup_{h\in\mathbb{R}} \frac{1}{h}\iint |f_\varepsilon(t, x+h, v) - f_\varepsilon(t,x,v)| dxdv \leq \sup_{h\in\mathbb{R}} \frac{1}{h}\iint |f_0(x+h, v) - f_0(x,v)| dxdv\,.$$

Dans toute la suite, on supposera que f_0 est régulière, disons $f_0 \in C^1_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

6. *Régularité temporelle.* En utilisant la conservation de la masse, obtenir une borne sur $(\partial_t u_\varepsilon)$. En déduire qu'à extraction près, u_ε converge presque partout.

7. Soit u la limite de (u_ε). Montrer que u est l'équation de Hopf

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x u^2 = 0\,.$$

et satisfait la condition d'entropie $\partial_t u^2 + \frac{2}{3}\partial_x u^3 \leq 0$.

Rappel : Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov Soit $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^p(\Omega)$ et soit ω compact inclus dans Ω. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ avec $|h| \leq \delta$, et $f \in \mathcal{F}$, on ait $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} \leq \varepsilon$. Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $L^p(\omega)$.

⋆