Td n° 6 d'Analyse fonctionnelle

Fonctions harmoniques

Séance du 21 mars 2014

Exercice 1. *Solution élémentaire du laplacien*

On souhaite trouver les solutions de $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

1. Calculer $\Delta(|x|^\alpha)$ dans $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$:

$$< \Delta \frac{1}{|x|^{N-2}}, \phi >= \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{\partial B_\epsilon} (\phi \frac{\partial |x|^{2-N}}{\partial n} - |x|^{2-N} \frac{\partial \phi}{\partial n}) d\sigma_\epsilon,$$

où $d\sigma_\epsilon$ est la mesure de surface sur ∂B_ϵ et $n(x) = \frac{x}{|x|}$ est la normale extérieure à B_ϵ.

3. Montrer que $-\Delta(\frac{1}{|x|^{N-2}}) = (N-2) mes(\mathbb{S}^{N-1})\delta_0$ au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

4. Soit $f \in \mathcal{E}'(\mathcal{R}^N)$ avec $N \geq 3$. Montrer que

$$u = \frac{1}{(N-2) mes(\mathbb{S}^{N-1})|x|^{N-2}} * f$$

est C^∞ hors du support de f et que c'est la seule solution (au sens des distributions) de $-\Delta u = f$ qui tend vers 0 à l'infini.

5. Montrer que $-\Delta(-\frac{1}{2\pi} ln(|x|)) = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

⋆

Exercice 2. *Fonction de Green pour le demi-espace : le noyau de Poisson*

Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $x^* = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$ le symétrique de x par rapport à l'hyperplan $\partial\Omega = \{x_n = 0\}$.

Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la solution fondamentale de l'équation de Laplace (voir l'exercice précédent).

1. Montrer que si $x \in \Omega$, alors pour tout $y \in \partial\Omega$, $\Phi(y - x^*) = \Phi(y - x)$.

2. Montrer que pour $x \in \Omega$ fixé, la fonction Φ^x définie par $\Phi^x(y) := \Phi(y - x^*)$ vérifie

$$\begin{cases} \Delta \Phi^x = 0 & \text{dans } \Omega\,, \\ \Phi^x(y) = \Phi(y - x) & \text{pour } y \in \partial\Omega\,. \end{cases}$$

3. On se fixe $x \in \Omega$ comme paramètre, et on pose $G(x, y) := \Phi(y - x) - \Phi^x(y)$. Montrer que pour tout $y \in \partial\Omega$,

$$-\frac{\partial G}{\partial \nu_\Omega}(x, y) = \frac{2x_n}{mes(\mathbb{S}^{n-1})} \frac{1}{|x - y|^n}\,.$$

4. Montrer que

$$\frac{2x_n}{mes(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|y - x|^n} dS_y = 1.$$

On suppose que $g \in C^0(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$.

5. Montrer que la fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ donnée par

$$u(x) = \frac{2x_n}{mes(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{\partial\Omega} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dS_y\,,$$

et bien définie, et que u vérifie

– $u \in C^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,
– $\Delta u = 0$ dans Ω.

6. Montrer que $\lim_{x\to z, x\in\Omega} u(x) = g(z)$, et que u est donc solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega\,, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

⋆

Exercice 3. *Inégalité de Harnack*

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$. Soit u est harmonique positive sur Ω.

1. En utilisant la formule de Poisson, montrer que pour tout $a \in \Omega$, $R > 0$ tels que $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$, on a

$$\forall 0 \leq r < R, \quad \frac{R-r}{R+r} u(a) \leq u(a + re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r} u(a).$$

2. En déduire que pour K compact connexe de Ω, il existe α, β tels que

$$\forall x, y \in K, \quad \alpha u(x) \leq u(y) \leq \beta u(x).$$

3. Soit u_n une suite de fonctions harmoniques sur Ω telles que $u_{n+1} \geq u_n$. Montrer que l'on a l'une des alternatives

– u_n converge uniformément sur les compact de Ω (et la limite est harmonique),
– pour tout $z \in \Omega$, $u_n(z) \to \infty$.

⋆

Exercice 4. *Estimation des dérivées d'une fonction harmonique*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ soit une fonction harmonique dans Ω.

1. Montrer que si $B_r(x_0) \subset \Omega$, alors pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) \nu_j(y)\, dy\,,$$

où ν_j est la j-ième coordonnée du vecteur normal unitaire ν à $\partial B_r(x_0)$.

2. On suppose que $m \leq u \leq M$ sur $\partial B_r(x_0)$ pour deux constantes m et M. Montrer que

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) \right| \leq C_n \frac{(M-m)}{r}\,,$$

où C_n est une constante qui dépend de la dimension.

3. En déduire que si $m \leq u \leq M$ sur $\partial\Omega$, alors

$$|\nabla u(x)| \leq C_n \frac{(M-m)}{d(x, \partial\Omega)}.$$

Indication : On pourra utiliser le principe du maximum.

4. Montrer que si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions harmoniques dans Ω qui est uniformément bornée, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge uniformément (ainsi que ses dérivées) sur tout compact de Ω vers une fonction harmonique dans Ω.

⋆