

# Analyse fonctionnelle

## TD n° 6

### OPÉRATEURS COMPACTS

Séance du 8 mars 2017

#### Exercice 1. *Échauffement*

Sur l'espace  $\ell^2(\mathbb{N})$ , on considère la multiplication par  $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par

$$M_a : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}), \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \{a_n u_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Montrer que  $M_a$  est continue si et seulement si  $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ . Montrer que  $M_a$  est compacte si et seulement si  $a_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

★

#### Exercice 2. *Un opérateur compact « renforce » la convergence*

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach, et  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . On suppose que  $E$  est réflexif. Montrer que  $T$  est compact si et seulement si l'image par  $T$  de toute suite faiblement convergente de  $E$  est une suite fortement convergente de  $F$ .

★

#### Exercice 3. *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*

Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable, et  $T \in \mathcal{L}(H)$ .

**Définition 1.** On dit que  $T$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne  $(e_n)$  de  $H$  telle que  $\sum_n \|Te_n\|^2 < \infty$ .

1. Soit  $(f_p)$  une base hilbertienne de  $H$ . Montrer que

$$\sum_p \|T^* f_p\|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2.$$

En déduire que pour toute base hilbertienne  $(\tilde{e}_m)$  de  $H$ ,  $\sum_m \|T\tilde{e}_m\|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2$ . On note  $\|T\|_{HS}^2$  cette quantité.

2. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est continu, de norme  $\leq \|T\|_{HS}$ .

3. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est compact. Que dire de la réciproque ?

*Indication :* Penser à l'exercice 1.

4. (*Un exemple.*) On considère dans cette question  $H = \ell^2(\mathbb{N})$ , et on fixe  $c = \{c_n\} \in H$ . On définit l'opérateur d'anti-convolution  $\Gamma_c$  par

$$\Gamma_c : H \rightarrow H, \{x_n\}_{n \geq 0} \mapsto \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} c_{n+p} x_p \right\}_{n \geq 0}.$$

Montrer que  $\Gamma_c$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si  $\sum (1+n)|c_n|^2 < \infty$ .

★

**Exercice 4.** *Opérateurs à noyaux*

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . On considère l'espace de Hilbert  $H = L^2(\Omega, \mathbb{R})$ .

1. Soit  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de  $L^2(\Omega \times \Omega)$ . On définit

$$(T_K f)(x) = \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy.$$

Montrer que  $T_K$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt, avec  $\|T_K\|_{HS} = \|K\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}$ .

2. Montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur  $H = L^2(\Omega)$  s'écrit de manière unique sous la forme  $T_K$ .

3. En utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, montrer directement que  $T_K$  est limite en norme d'opérateurs de rang fini.

★

**Exercice 5.** *Théorème de Krein-Rutman*

Soit  $E$  un espace de Banach, et soit  $C$  un cône convexe de sommet 0 (*i.e.* pour tout  $x, y \in C$  et  $\lambda, \mu \geq 0, \lambda x + \mu y \in C$ ). On suppose de plus que  $C$  est fermé, d'intérieur non vide, et que  $C \cap (-C) = \{0\}$ .

Soit  $T$  un opérateur compact tel que  $T(C \setminus \{0\}) \subset \overset{\circ}{C}$ . On fixe  $u \in \overset{\circ}{C}$ .

1. Montrer qu'il existe  $r > 0$  tel que  $Tu - ru \in C$ .

2. On suppose qu'il existe  $x \in C$  et  $\lambda$  tel que  $T(x + u) = \lambda x$ . Montrer que  $\lambda \geq r$ .

*Indication :* On pourra prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(\frac{\lambda}{r})^n x - u \in C$ .

3. Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in C$ ,

$$\|x + u\| \geq \alpha.$$

En déduire que l'application  $\Phi : x \in C \mapsto T(\frac{x+u}{\|x+u\|})$  est continue, et appliquer le théorème du point fixe de Schauder<sup>1</sup> à  $\Phi$  pour prouver qu'il existe  $x \in C$  tel que

$$T(x + u) = \|x + u\|x.$$

4. En reprenant les premières questions avec  $\varepsilon u$  au lieu de  $u$ , et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, montrer qu'il existe  $x_0 \in C \setminus \{0\}$  et  $\mu_0 > 0$  tels que

$$T(x_0) = \mu_0 x_0.$$

5. Soit  $x \in C \setminus \{0\}$  tel que  $T(x) = \mu x$ . Montrer que  $\mu = \mu_0$  et  $x \in \mathbb{R}x_0$ .

*Indication :* On pourra montrer qu'il existe  $b > 0$  tel que  $(1 - \beta)x_0 - \beta x \in C$  pour  $0 \leq \beta \leq b$  et  $(1 - \beta)x_0 - \beta x \notin C$  pour  $b < \beta \leq 1$ .

6. Soit  $x \in E$  tel que  $T(x) = \mu x$ . Montrer que  $\mu \leq \mu_0$ .

7. Montrer que le théorème de Krein-Rutman est une généralisation du théorème de Perron-Frobenius : soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , une matrice à coefficients strictement positifs; alors  $M$  admet au moins une valeur propre, et le rayon spectral de  $M$  est une valeur propre simple de  $M$ , associée à un vecteur propre à coefficients strictement positifs.

★

---

1. En voici l'énoncé : soit  $\tilde{C}$  un convexe fermé non-vide dans un espace vectoriel topologique séparé  $X$ . Toute application continue  $f$  de  $\tilde{C}$  dans  $\tilde{C}$  telle que  $f(\tilde{C})$  soit relativement compact admet un point fixe.