Analyse fonctionnelle
TD n° 6

Distributions : singularités et régularisation

Séance du 19 mars 2018

Exercice 1. *Échauffement*

Montrer que $\delta_0' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ n'est pas une mesure.

⋆

Exercice 2. *Fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux*

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f telle qu'il existe $a_1 < \cdots < a_N$ dans I tels que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a_1, \ldots, a_N\}$. On suppose que f et f' admettent des limites à droite et à gauche en a_i pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, et on note les limites de f respectivement $f(a_i + 0)$ et $f(a_i - 0)$. Comme $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$, elle définit une distribution T_f. Montrer que, au sens des distributions,

$$T_f' = T_{f'_{\mathrm{reg}}} + \sum_{i=1}^{N} (f(a_i + 0) - f(a_i - 0))\delta_{a_i},$$

où $f'_{\mathrm{reg}} \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ est la fonction égale à f' sur $I \setminus \{a_1, \ldots, a_N\}$.

⋆

Exercice 3. *Fonctions lipschitziennes*

Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Montrer que f est lipschitzienne, *i.e.* qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d,$$

si et seulement si les dérivées partielles de f (au sens des distributions) vérifient

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \forall j \in [\![1, d]\!].$$

⋆

Exercice 4. *Pseudo monômes*

Dans cet exercice, les fonctions et distributions seront définies sur $\mathbb{R}$. On note $x_+ = \max(x, 0)$. On souhaite définir la partie finie de x_+^α, notée $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$.

1. À quelle condition $x \mapsto x_+^\alpha \in L^1_{\mathrm{loc}}$? Dans ce cas, on note également $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ cette distribution.

2. Pour $-2 < \alpha < -1$, montrer que, pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \phi(x)\, dx = A\varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon,$$

où A dépend de ϕ, mais pas de ε et où R_ε possède une limite lorsque $\varepsilon \to 0$, que l'on exprimera en fonction de ϕ. Cette limite est notée $\langle \mathrm{pf}(x_+^\alpha), \phi\rangle$. Montrer que $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ est alors une distribution d'ordre 1.

3. Pour $\alpha < -2$, $\alpha \notin -\mathbb{N}$, soit m la partie entière de $-\alpha$. Montrer de même que, pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\int_e^\infty x^\alpha \phi(x)\, dx = \sum_{k=0}^{m-1} A_k \varepsilon^{k+1+\alpha} + R_\varepsilon,$$

où les A_k dépendent de ϕ mais pas de ε, et où R_ε possède une limite lorsque $\varepsilon \to 0$, que l'on exprimera en fonction de ϕ, et qui est notée $\langle \mathrm{pf}(x_+^\alpha), \phi\rangle$. Montrer que $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ est alors une distribution.

4. La distribution $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ étant ainsi déterminée pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$, calculer sa dérivée et son ordre.

5. Montrer que pour tout $\alpha_0 \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$, $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ existe, et vaut $\mathrm{pf}(x_+^{\alpha_0})$.

6. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{pf}(x_+^{-m})(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_\varepsilon^{+\infty} x^{-m}\varphi(x)dx + \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\phi^{(k)}(0)\varepsilon^{k+1-m}}{k!(k+1-m)} + \frac{\phi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}\ln\varepsilon \right).$$

Vérifier qu'il s'agit d'une distribution. Quelle en est la dérivée ? Quel est son ordre ? Est-elle limite d'une suite de $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$, $\alpha \notin -\mathbb{N}$?

$\star$

Exercice 5. *Propriété de la moyenne*

Soit $n \geq 2$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ vérifie la propriété de la moyenne si

$$\forall x \in \Omega,\ \forall r > 0 \text{ tels que } B(x,r) \subset \Omega, \quad f(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} f(\sigma) d\sigma.$$

1. Montrer qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant la propriété de la moyenne satisfait $-\Delta f = 0$.

Indication : On pourra faire un développement de Taylor-Lagrange de f à l'ordre 2.

2. En déduire que si $f \in \mathcal{C}^0$ vérifie la propriété de la moyenne, alors $-\Delta f = 0$ au sens des distributions.

3. Réciproquement, montrer que si $f \in \mathcal{C}^\infty$ satisfait $-\Delta f = 0$, alors f vérifie la propriété de la moyenne.

Indication : On peut calculer $\int_{B(0,r)} f\Delta(|x|^2 - r^2)$.

4. Montrer que si une distribution T satisfait $-\Delta T = 0$, alors T s'identifie à une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et satisfait le propriété de la moyenne.

Indication : On pourra considérer des approximation de l'unité ϕ_m, montrer que $\phi_m * T$ satisfait la propriété de la moyenne et converge uniformément sur les compacts. Pour cela, on pourra considérer les fonctions $\phi_{x,r}(y) = \psi(|x-y|/r)$, $\psi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ fixée.

$\star$