Analyse fonctionnelle
TD n^{o} 6

Distributions

Séance du 11 mars 2019

Exercice 1. *Échauffement : quelques exemples de distributions*

1. Montrer que $u : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{(j)}(j) \in \mathbb{R}$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre infini.

2. Montrer que la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ appartient à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$, mais ne se prolonge pas à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

⋆

Exercice 2. *Dérivation et intégration des distributions*

1. On pose $f(x) = |\sin(x)|$ pour $x \in \mathbb{R}$. Calculer f'' au sens des distributions.

2. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une distribution $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $v' = u$, et que l'ensemble des telles distributions v forme un espace affine de dimension 1.

⋆

Exercice 3. *Distributions dont le support est un point*

Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tel que $\operatorname{supp} u = \{0\}$. Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive, telle que $\psi = \mathbb{1}$ sur un voisinage de $\overline{B(0,1)}$ et $\operatorname{supp} \psi \in B(0,2)$. On pose $\psi_r(x) := \psi(x/r)$ pour $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Rappeler pourquoi u est d'ordre fini, que l'on notera $m \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que pour tout $r > 0$, $\psi_r u = u$.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, telle que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$, on ait $\partial^\alpha \varphi(0) = 0$. Rappeler pourquoi $\langle u, \varphi \rangle = 0$.

4. Montrer qu'il existe des nombres complexes a_β tels que $u = \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta \delta_0^{(\beta)}$.

⋆

Exercice 4. *Valeur principale de $1/x$*

On définit la valeur principale de $1/x$, notée $\operatorname{vp}(\frac{1}{x})$, de la manière suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \left\langle \operatorname{vp}(\tfrac{1}{x}), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right).$$

1. Montrer que la limite existe, et que la formule définit bien une distribution. Quel est son ordre ?

2. Montrer que $\operatorname{vp}(\frac{1}{x})$ est la dérivée de $\log|x|$ au sens des distributions.

3. Montrer que $x \cdot \operatorname{vp}(\frac{1}{x}) = \mathbb{1}$.

4. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xu = \mathbb{1}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $u = \operatorname{vp}(\frac{1}{x}) + c\delta_0$.

5. Montrer que $|x|^{\alpha-2}x \to \operatorname{vp}(\frac{1}{x})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ quand $\alpha \searrow 0$.

⋆

Exercice 5. *Support et ordre*

Soit u l'application linéaire définie, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, par :

$$u(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{1}{i}\right) - n\varphi(0) - \log(n)\varphi'(0) \right).$$

1. Montrer que $u(\varphi)$ est bien définie, et que u est une distribution d'ordre au plus 2.

2. Quel est le support S de u ?

3. On considère une suite d'élément φ_k de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ satisfaisant $0 \le \varphi_k \le 1$, $\mathrm{supp}(\varphi_k) \subseteq]\frac{1}{k+1}, 2[$ et $\varphi_k = 1$ sur un voisinage de $[\frac{1}{k}, 1]$. Soit $p \in \mathbb{N}$. À l'aide des φ_k, montrer qu'on ne peut obtenir aucune majoration du type

$$|u(\varphi)| \le C \sum_{i=0}^{p} \sup_{x\in S} |\varphi^{(i)}(x)|.$$

4. Quel est l'ordre de u ?

Indication : On pourra considérer des fonctions du type

$$\psi_k(x) := \psi(x) \int_0^x \int_0^y \varphi(kt) dt dy,$$

où $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$ d'intégrale 1, et $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(]-1,2[)$ est telle que $\psi(x) = 1$ pour $x \in [0,1]$.

⋆

Exercice 6. *Théorème de Banach-Steinhaus et distributions*

1. Montrer la version suivante du théorème de Banach-Steinhaus.

Soient E et F deux espaces topologiques localement convexes séparés, et $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs de $\mathcal{L}_c(E, F)$. On définit

$$B = \{x \in E \mid (T_i(x))_{i\in I} \subset F \text{ est bornée}\}.$$

Si B n'est pas maigre dans E, alors $B = E$ et $(T_i)_{i\in I}$ est équicontinue (au sens où pour tout voisinage W de 0 dans F, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que pour tout $i \in I$, $T_i(V) \subset W$).

2. Soit E un espace topologique localement convexe et $A \subset E$. Montrer que A est borné (dans le sens où pour tout voisinage V de 0, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A \subset \lambda V$) si et seulement si pour tout $\ell \in E^*$, $\ell(A) \subset \mathbb{R}$ est borné.

Indication : On pourra d'abord traiter le cas où E est un espace vectoriel normé.

On fixe maintenant un ouvert Ω de $\mathbb{R}^k$.

3. Montrer qu'un ensemble $A \subset \mathcal{D}(\Omega)$ est borné si et seulement si

$$\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \sup\{\langle T, \varphi\rangle \mid \varphi \in A\} < +\infty.$$

4. Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $(T(\varphi_n))_n$ est une suite numérique bornée. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(\varphi_n)_n$ qui converge pour la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$.

5. Soit $(T_n)_n$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $(T_n(\varphi))_n$ est une suite numérique bornée. Montrer qu'il existe une sous suite de $(T_n)_n$ qui converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, et que la convergence est uniforme sur tout sous-ensemble borné de $\mathcal{D}(\Omega)$.

⋆