Corrigé – TD 6

Changement de variables, Approximations

Exercice 0 (Théorème de Lusin).
Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lambda(\{x \in [0,1]\colon f(x) \neq g(x)\}) \leq \varepsilon.$$

INDICATION : On pourra commencer par le cas où $f = \mathbf{1}_A$ avec A borélien de $[0,1]$.

Corrigé : Commençons par le cas où $f = \mathbf{1}_A$ avec A borélien de $[0,1]$. Par régularité de la mesure de Lebesgue, il existe un compact F et un ouvert O tels que

$$F \subset A \subset O \quad \text{et} \quad \lambda(O \backslash F) \leq \varepsilon.$$

Il existe alors une fonction continue à valeur dans $[0,1]$ qui vaut 1 sur F et 0 en dehors de O. En effet, $\mathrm{d}(F, O^c) := \inf\{|x-y|\colon x \in F, y \in O^c\} = \eta > 0$ par compacité, et on vérifie que la fonction

$$f_{F,O}\colon x \mapsto \Big(1 - \frac{\mathrm{d}(x,F)}{\eta}\Big) \vee 0$$

vérifie bien les conditions requises. Donc la fonction $f_{F,O}$ est continue et

$$\lambda\big(\{x, \mathbf{1}_A(x) \neq f_{F,O}(x)\}\big) \leq \lambda(O \backslash F) \leq \varepsilon.$$

Dans le cas général, on peut supposer que $0 \leq f \leq 1$ et on définit par récurrence

- $f_1 = \frac{1}{2}\,\mathbf{1}_{\{f \geq 1/2\}}$
- $f_2 = \frac{1}{4}\,\mathbf{1}_{\{f - f_1 \geq 1/4\}}$
- $f_3 = \frac{1}{8}\,\mathbf{1}_{\{f - f_1 - f_2 \geq 1/8\}}$
- $\cdots$

Ainsi $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ et pour tout n, $2^n f_n$ est une fonction indicatrice d'un borélien de $[0,1]$. D'après les résultats précédents pour chaque $n \geq 1$, il existe une fonction $0 \leq h_n \leq 1$ continue telle que $\lambda(h_n \neq 2^n f_n) \leq \varepsilon 2^{-n}$. La fonction continue $h = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} h_n$ répond alors à la question.

Exercice 1 (Formule des compléments). On note Γ la fonction définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à `shen.lin@ens.fr`, ou bien à passer au bureau V7.

1. Calculer la mesure image de la mesure

$$x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}\mathbf{1}_{\{x,y\geq 0\}}\,dx\,dy,$$

par l'application $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2\mapsto(x+y,x/(x+y))$.

2. En déduire la formule des compléments :

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt.$$

Corrigé :

1. Soit $f:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On veut calculer

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f\Big(x+y,\frac{x}{x+y}\Big)x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}\,dx\,dy.$$

Soit ϕ: $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2\mapsto(x+y,x/(x+y))$, qui est un C^1-difféomorphisme sur $\mathbb{R}_+^*\times]0,1[$ de jacobien

$$\mathrm{Jac}(\phi)(x,y)=-\frac{1}{x+y}.$$

D'après la formule du changement de variables, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f\Big(x+y,\frac{x}{x+y}\Big)x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}\,dx\,dy\\
&=\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f\Big(x+y,\frac{x}{x+y}\Big)\Big((x+y)\frac{x}{x+y}\Big)^{a-1}\Big((x+y)-(x+y)\frac{x}{x+y}\Big)^{b-1}(x+y)e^{-(x+y)}(x+y)^{-1}\,dx\,dy\\
&=\int_{\mathbb{R}_+^*\times]0,1[} f(u,v)(uv)^{a-1}(u-uv)^{b-1}ue^{-u}\,du\,dv\\
&=\int_{\mathbb{R}_+^*\times]0,1[} f(u,v)e^{-u}u^{a+b-1}v^{a-1}(1-v)^{b-1}\,du\,dv.
\end{aligned}$$

Donc la mesure image par $(x,y)\mapsto(x+y,x/(x+y))$ de la mesure $x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}\mathbf{1}_{\{x,y>0\}}\,dx\,dy$ est

$$e^{-u}u^{a+b-1}v^{a-1}(1-v)^{b-1}\mathbf{1}_{\{u>0,0<v<1\}}du\,dv.$$

2. D'après le théorème de Fubini-Tonelli la masse totale de cette mesure est

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}\,dx\,dy=\Gamma(a)\Gamma(b),$$

et

$$\int_{\mathbb{R}_+^*\times]0,1[} e^{-u}u^{a+b-1}v^{a-1}(1-v)^{b-1}\,du\,dv=\Gamma(a+b)\int_0^1\,d\,t^{a-1}(1-t)^{b-1}.$$

On trouve donc la formule des compléments.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive. Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} \lambda_n(\,dx),$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et λ_n désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Corrigé : La matrice A est symétrique définie positive donc il existe K une matrice symétrique définie positive telle que $A = K^2$. Soit $\phi\colon x \in \mathbb{R}^n \mapsto Kx$. L'application ϕ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $|\mathrm{Jac}(\phi)| = \det(K)$. On a donc d'après le théorème du changement de variables,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} \lambda_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Kx,Kx\rangle} \lambda_n(dx) = (\det(K))^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)} dx_1 \ldots dx_n.$$

D'après le théorème de Fubini-Tonelli on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)} dx_1 \ldots dx_n = \prod_{1\le i\le n} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_i^2} dx_i \right).$$

Or pour chaque $i \in \{1,\ldots,n\}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} \lambda_n(dx) = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det(A)}}.$$

Exercice 3. Quelle est la mesure image de $(\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-x^2/2} dx$ par l'application $x \mapsto x^{-2}$?

Corrigé : Soit $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On veut calculer

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2} dx.$$

On divise l'intégrale en deux morceaux et on regarde les deux C^1-difféomorphismes suivants

$$\begin{array}{rccc} \phi: &]0,\infty[& \to &]0,\infty[\\ & x & \mapsto & \frac{1}{x^2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \phi': &]-\infty,0[& \to &]0,\infty[\\ & y & \mapsto & \frac{1}{y^2}. \end{array}$$

Regardons la première intégrale. La formule de changement de variable donne

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f\left(\frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(u) e^{-1/2u} \frac{1}{2u^{3/2}} du,$$

et pour des raisons de symétrie, la deuxième intégrale a la même valeur. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(u) e^{-1/2u} \frac{1}{u\sqrt{u}} du,$$

et la mesure image cherchée est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2u} \frac{1}{u\sqrt{u}} \mathbf{1}_{\{u>0\}} du.$$

Exercice 4 (Petite question)**.** Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.

1. On suppose que pour toute fonction mesurable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ on a
$$\int f(x)\mu(dx) = \int f(x)g(x)dx.$$
Que dire de μ?

2. On suppose maintenant que μ est finie et que pour toute fonction Lipschitzienne bornée $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ on a
$$\int f(x)\mu(dx) = \int f(x)g(x)dx.$$
Que dire de μ?

Corrigé :

1. Si on prend $f = \mathbb{1}_A$ avec $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on voit que
$$\mu(A) = \int_A g(x)dx.$$
Ainsi μ est la mesure de densité g par rapport à la mesure de Lebesgue.

2. On va montrer que la conclusion est la même. Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, considérons
$$\phi_n(x) = (n\, d(x,]a, b[^c)) \wedge 1,$$
qui est une fonction Lipschitzienne tendant simplement en croissant vers $\mathbb{1}_{]a,b[}$. Ainsi,
$$\int \phi_n(x)\mu(dx) = \int \phi_n(x)g(x)dx,$$
et d'après le théorème de convergence monotone, ceci implique
$$\mu(]a, b[) = \int_{]a,b[} g(x)dx.$$
En particulier, ceci impose que g est intégrable. En utilisant le lemme de la classe monotone, on conclut que
$$\mu(A) = \int_A g(x)dx$$
pour tout borélien $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Ainsi μ est encore la mesure de densité g par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 5. On se donne deux mesures positives boréliennes μ et ν sur $\mathbb{R}$, et on suppose que pour tout choix de $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$,
$$\mu(]a, b[) \leq \nu(]a, b[) < \infty.$$
Montrer alors que $\mu(A) \leq \nu(A)$ pour tout borélien A.

Corrigé : Tout d'abord, on remarque que $\mu(]a,b[) \leq \nu(]a,b[)$ si $a,b \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ (pour le voir, on peut par exemple utiliser la sigma additivité de μ et ν), et que μ et ν sont des mesures de Radon sur $\mathbb{R}$.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrons que $\mu(O) \leq \nu(O)$. Il existe une suite d'intervalles $(]a_n, b_n[)_{n\geq 1}$, avec $a_n, b_n \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ telle que

$$O = \bigcup_{n\geq 0}]a_n, b_n[$$

où l'union est disjointe. Ainsi

$$\mu(O) = \sum_{n\geq 0} \mu(]a_n, b_n[) \leq \sum_{n\geq 0} \nu(]a_n, b_n[) = \nu(O).$$

Puis, les mesures de Radon sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ étant régulières extérieurement, on a pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O);\ A \subset O, O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\} \leq \inf\{\nu(O);\ A \subset O, O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\} = \nu(A).$$

Cela conclut.

Exercice 6 (Borel–Cantelli revient)**.** Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue et $\alpha > 0$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0$.

Indication : on pourra considérer, pour $\eta > 0$, les ensembles

$$A_{\eta,n} = \{x \in \mathbb{R}\colon n^{-\alpha}|f(nx)| > \eta\},\ n \geq 1.$$

Corrigé : Pour $\eta > 0$ et $n \geq 1$, on a $A_{\eta,n} = \frac{1}{n}\{y \in \mathbb{R}\colon n^{-\alpha}|f(y)| > \eta\}$. D'après l'inégalité de Markov, la mesure de $A_{n,\eta}$ est majorée par

$$\lambda(A_{\eta,n}) = \frac{1}{n}\lambda\left(\{y \in \mathbb{R}\colon |f(y)| > \eta n^\alpha\}\right) \leq \frac{1}{n}\frac{1}{\eta n^\alpha}\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda = \frac{1}{n^{\alpha+1}}\frac{1}{\eta}\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda.$$

Ainsi, la série de terme général $\lambda(A_{\eta,n})$ est sommable. D'après le lemme de Borel–Cantelli,

$$\lambda\Big(\limsup_n A_{\eta,n}\Big) = 0.$$

On a donc montré que, pour tout $\eta > 0$, pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\limsup_{n\to\infty} n^{-\alpha}|f(nx)| \leq \eta$. Ainsi, pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-\alpha}|f(nx)| \leq 1/p,$$

ce qui signifie que pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0$.

Exercice 7. Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré de masse totale finie et $f\colon E \to \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que:

$$f \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, \mu) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n\geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) < \infty.$$

Que se passe-t-il si la masse totale de μ est infinie?

Corrigé : On a

$$\begin{aligned}
\int_E |f|\, d\mu &= \sum_{n\geq 0} \int_E |f| \mathbf{1}_{\{n\leq |f|<n+1\}} d\mu \\
&\leq \sum_{n\geq 0} (n+1)\mu(\{n \leq |f| < n+1\}) \\
&= \sum_{n\geq 0} (n+1)\big(\mu(\{|f|\geq n\}) - \mu(\{|f|\geq n+1\}\big) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mu(\{|f|\geq n\}) + \sum_{n\geq 0} n\mu(\{|f|\geq n\}) - \sum_{n\geq 0}(n+1)\mu(\{|f|\geq n+1\}) \\
&= \mu(E) + \sum_{n\geq 1} \mu(\{|f|\geq n\}).
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé le fait que $\mu(\{|f| \geq 0\}) = \mu(E)$. On montre de la même manière que

$$\int_E |f|\, d\mu \geq \sum_{n\geq 1} \mu(\{|f|\geq n\}).$$

On obtient l'équivalence demandée.

Dans le cas où $\mu(E) = \infty$, on peut avoir $\sum_{n\geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) < \infty$ avec f non intégrable. Considérer par exemple $f = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Exercice 8 (Un résultat fondamental...)**.** Soit f une fonction dérivable sur $[0, 1]$, de dérivée f' bornée. Prouver que $\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0)$.

Corrigé : On définit sur $[0, 1]$ la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ par $g_n(x) = n(f(x+1/n)-f(x))$ si $x \leq 1-1/n$ et 0 sinon. Pour $x \in [0, 1[$ fixé, $g_n(x)$ converge vers $f'(x)$. Soit $M = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$, qui est fini par hypothèse. D'après le théorème des accroissements finis, $|g_n(x)| \leq M$ pour tout $x \leq 1-1/n$, et cette inégalité est clairement vraie pour $x \in [1 - 1/n, 1]$. Ainsi, $|g_n(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0, 1]$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^1 f'(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx.$$

Mais, en notant $F(x) = \int_0^x f(t)dt$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g_n(x)dx &= n\int_0^{1-1/n} f(x+1/n)dx - n\int_0^{1-1/n} f(x)dx \\
&= n\int_{1/n}^1 f(x)dx - n\int_0^{1-1/n} f(x)dx \\
&= n(F(1) - F(1-1/n)) - n(F(1/n) - F(0)),
\end{aligned}$$

qui converge vers $f(1) - f(0)$ lorsque $n \to \infty$. En effet, la continuité de f en 0 et 1 implique $F'(0) = f(0)$ et $F'(1) = f(1)$. Le résultat s'ensuit.

Remarque: Soit $G(t) = \int_0^t f'(u)du$. En écrivant $(G(t+\epsilon) - G(t))/\epsilon = \int_0^1 f'(t+\epsilon u)du$, on ne peut pas utiliser le théorème de convergence dominée pour dire que cette quantité converge vers $f'(t)$ lorsque $\epsilon \to 0$. En effet, on a aucune hypothèse sur la continuité de f'.

Exercice 9. (Encore la fonction Γ)
Pour tout $t > 0$ on pose

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx.$$

1. Montrer que ceci définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer la formule d'Euler : pour tout $t > 0$,

$$\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^t n!}{t(t+1)\dots(t+n)}.$$

   Indication: on pourra considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies par

$$f_n : x \in]0,\infty[\mapsto 1_{]0,n[}(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{t-1}.$$

Corrigé :

1. Pour tout $t > 0$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto g(t,x) = x^{t-1}e^{-x}$ est intégrable donc Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $k \geq 1$ et pour tout $x > 0$, g est k-fois dérivable par rapport à t et

$$\frac{\partial^k g(x,t)}{\partial t^k} = (\ln(x))^k x^{t-1}e^{-x}.$$

   Pour tous $A > a > 0$, $t \in [a,A]$ et $x > 0$, on a

$$\left|\frac{\partial^k g(x,t)}{\partial t^k}\right| \leq \left|(\ln(x))^k x^{A-1}e^{-x}\right| \mathbf{1}_{\{x\geq 1\}} + \left|(\ln(x))^k x^{a-1}e^{-x}\right| \mathbf{1}_{\{x<1\}},$$

   et la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto |(\ln(x))^k x^{A-1}e^{-x}|\mathbf{1}_{\{x\geq 1\}} + |(\ln(x))^k x^{a-1}e^{-x}|\mathbf{1}_{\{x<1\}} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \lambda)$. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur tout ensemble de la forme $[a,A]$ et ceci pour tout $k \geq 1$. On obtient donc le résultat.

2. On fixe $t > 0$. On voit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge p.p. vers $f\colon x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{t-1}e^{-x}$ et de plus pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| \leq x^{t-1}e^{-x}$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{t-1}\,dx.$$

   Or, en posant $u = x/n$, on a

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{t-1}\,dx = n^t \int_0^1 (1-u)^n u^{t-1}\,dt = n^t I_n(t).$$

   On montre par une intégration par parties que $I_n(t) = (nI_{n-1}(t+1))/t$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit que

$$I_n(t) = \frac{n!}{t(t+1)\dots(t+n-1)} I_0(t+n) = \frac{n!}{t(t+1)\dots(t+n-1)(t+n)}.$$

Exercice 10 (Pavage). On se donne un rectangle $R=[a,b]\times[c,d]$ tel qu'il existe un pavage de R en petits rectangles

$$R=\bigcup_{i=0}^{n}\underbrace{[a_i,b_i]\times[c_i,d_i]}_{R_i},$$

tels que les rectangles intérieurs $\mathring{R_i}=]a_i,b_i[\times]c_i,d_i[$ soient deux-à-deux disjoints, et que pour chaque $i\in\{0,1,\dots,n\}$, au moins l'une des deux longueurs $|b_i-a_i|$ ou $|d_i-c_i|$ soit entière. Montrer alors que l'une des deux longueurs $|b-a|$ ou $|d-c|$ de R est entière.

Corrigé : On calcule

$$\iint_R e^{i2\pi(x+y)}dxdy.$$

La fonction $(x,y)\mapsto e^{i2\pi(x+y)}$ est dans $\mathscr{L}^1(R)$ (la fonction est bornée et l'ensemble d'intégration est compact), donc $\iint_R \dots=\sum_i\iint_{R_i}\dots$ Or sur chaque R_i, on a d'après le théorème de Fubini

$$\iint_{R_i} e^{i2\pi(x+y)}dxdy=\frac{-1}{4\pi^2}(e^{i2\pi b_i}-e^{i2\pi a_i})(e^{i2\pi d_i}-e^{i2\pi c_i})=0.$$

Donc

$$\iint_R e^{i2\pi(x+y)}dxdy=\frac{-1}{4\pi^2}(e^{i2\pi b}-e^{i2\pi a})(e^{i2\pi d}-e^{i2\pi c})=0,$$

ce qui signifie que l'un des deux nombres $|b-a|$ ou $|d-c|$ est entier.