PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 6
MARTINGALES - CONVERGENCE $\mathbf{L}^p$ - UNIFORME INTÉGRABILITÉ

Exercice 1 (Série aléatoire)**.**
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables indépendantes de Bernoulli de paramètre $1/2$, i.e. $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$ et α_n une suite de réels positifs. On considère la série

$$S_n \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i.$$

1. Montrer que si $\sum \alpha_i^2 < \infty$ alors S_n converge presque sûrement.
2. $(\star)$ Montrer que si $\sum \alpha_i^2 = \infty$ alors S_n oscille indéfiniment presque sûrement.

Correction : Il est aisé de voir que S_n est une martingale qui est bornée dans $\mathbf{L}^2$ et donc dans $\mathbf{L}^1$ et ainsi converge presque sûrement.

Exercice 2 (Théorème de Kakutani)**.**
Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes positives de moyenne 1. Pour $n \geq 0$ on pose

$$M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k \qquad (M_0 = 1).$$

1. Montrer que (M_n) est une martingale qui converge p.s. vers M_∞.
   On pose pour $n \geq 1$, soit $a_n = \mathbb{E}[\sqrt{X_n}] \in]0, 1]$ et
   $$N_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{X_k}}{a_k} \qquad (N_0 = 1).$$
2. En utilisant le processus (N_n) montrer que les cinq conditions suivantes sont équivalentes
   (a) $\mathbb{E}[M_\infty] = 1$,
   (b) $M_n \to M_\infty$ dans $\mathbf{L}^1$ quand $n \to \infty$,
   (c) la martingale (M_n) est uniformément intégrable,
   (d) $\prod_{k=1}^{\infty} a_k > 0$,
   (e) $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - a_k) < \infty$.

   Montrer que si l'une des conditions précédentes n'est pas remplie alors $M_\infty = 0$ presque sûrement.

Correction :

1. Facile.
2. Le cours donne $(b) \iff (c)$. C'est classique (prépa) que $(d) \iff (e)$ (passer au $\log$ et faire un équivalent). De plus $(b) \Rightarrow (a)$, la réciproque est donnée par le lemme de Scheffé. D'un autre côté (N_n) est une martingale positive donc converge $p.s.$ vers N_∞. Si $\prod a_k > 0$ alors $N_n = \sqrt{M_n}/\prod^n a_k$ est bornée dans $\mathbb{L}^2$ et converge dans $\mathbb{L}^2$ vers $\sqrt{M_\infty}/\prod a_k$. On en déduit que $M_n \to M_\infty$ dans $\mathbb{L}_1$, ceci prouve $(d) \Rightarrow (b)$. Si $\prod a_k = 0$ alors puisque $\sqrt{M_n}/\prod^n a_k$ converge p.s. vers une valeur finie N_∞, on a $M_n \to 0$ p.s et $M_\infty = 0$ p.s.. D'où non (d) implique non (a). La boucle est bouclée.

Exercice 3 (Loi du logarithme itéré.)**.**
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Le but de l'exercice est de montrer que p.s. on a

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} \leq 1 \,.$$

On pose $h(x) = \sqrt{2x\log\log x}$ pour $x \geq e$.

1. Montrer que pour tous $\theta > 0$ et $c > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c\right) \leq e^{-\theta c}\mathbb{E}\left(e^{\theta S_n}\right) \,.$$

   En déduire que :

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c\right) \leq e^{-\frac{c^2}{2n}} \,.$$

2. Soit $K > 1$. Majorer la quantité

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq K^n} S_k \geq Kh(K^{n-1})\right)$$

   et montrer que $\limsup\limits_{n\to\infty} h(n)^{-1}S_n \leq K$, p.s. Conclure.

   Remarque : Il est possible de montrer que $\limsup \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1$ p.s.

Correction :

1. La fonction $x \to e^{\theta x}$ est convexe, donc par Jensen, $(e^{\theta S_n})_{n\geq 0}$ est une sous martingale. Le résultat demandé se déduit alors de l'inégalité maximale de Doob. Maintenant faisons un peu de calcul gaussien : S_n suit une loi gaussienne centrée de variance n. Je vous laisse vérifier que $\mathbb{E}[e^{\theta S_n}] = e^{-\theta^2/2n}$, donc

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c\right) \leq e^{-\theta c+\theta^2/2n}.$$

   Comme cela est vrai pour tous les θ, on peut prendre le θ qui minimise le terme de droite : $\theta = \frac{c}{n}$. Ona a alors

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c\right) \leq e^{-\frac{c^2}{2n}}.$$

2. Maintenant on va reprendre le résultat précédent en remplaçant n par K^n et c par $Kh(K^{n-1}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq K^n} S_k \geq Kh(K^{n-1})\right) &\leq e^{-\frac{K^2h(K^{n-1})^2}{2K^n}} \\
&= e^{-\frac{K^2 2K^{n-1}\log\log(K^{n-1}}{2K^n}} \\
&= e^{-K\log\log K^{n-1}} = \frac{1}{(\log K)^K(n-1)^K}
\end{aligned}$$

La probabilité recherchée est donc inférieure à $\frac{cste}{n^K}$. Comme $K > 1$, ces probas sont sommables, et on peut utiliser le lemme de Borel-Cantelli :

$$\text{il n'y a qu'un nombre fini de } n \text{ tq } \max_{1\leq k\leq K^n} S_k \geq Kh(K^{n-1})\ p.s.$$

Maintenant il faut un peu bidouiller ceci de telle sorte qu'on arrive à $\limsup \frac{S_k}{h(k)} \leq K$ p.s. Soit k un entier tel que $\frac{S_k}{h(k)} \leq K$. Il existe un unique entier n tel que $k \in [K^{n-1}, K^n[$. Comme la fonction $h(x)$ est croissante, on a alors que $h(K^{n-1}) \leq h(k)$ et

$$\frac{S_k}{h(K^{n-1})} \geq \frac{S_k}{h(k)} \geq K,$$

$$\text{donc } \max_{1\leq k\leq K^n} S_k \geq Kh(K^{n-1}).$$

Donc s'il y avait une infinité de k tels que $\frac{S_k}{h(k)} \leq K$, il y aurait une infinité de n tels que $\max_{1\leq k\leq K^n} S_k \geq Kh(K^{n-1})$. Par le Borel-Cantelli de tout à l'heure, ceci est faux p.s. et

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{S_k}{h(k)} \leq K\ p.s.$$

Comme ceci est vrai pour tout $K > 1$, on en déduit que $\limsup \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} \leq 1$. Si vous êtes intéressés par la preuve de l'autre sens de l'inégalité, et de la démonstration quand la loi des X_i est quelconque, vous pouvez aller voir *W. Feller*, An introduction to Probability Theory and its Applications Vol.1 p 204-208 (code bibliothèque M 732 411(22).

Exercice 4 (La loi du tout ou rien de Hewitt-Savage.)**.** *Tiré du poly de J.-F. Le Gall.*
Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. L'application $\omega \to (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ...)$ définit une v.a. à valeurs dans l'espace produit $E^{\mathbb{N}^*}$, qui est muni de la tribu produit, la plus petite tribu rendant mesurable les applications coordonnées $(x_1, x_2, ...) \to x_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Une fonction mesurable F définie sur $E^{\mathbb{N}^*}$ est dite symétrique si

$$F(x_1, x_2, ...) = F(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, ...)$$

pour toute permutation π de $\mathbb{N}^*$ à support fini. On veut montrer que si F est une fonction symétrique sur $E^{\mathbb{N}^*}$, la variable aléatoire $Y := F(\xi_1, \xi_2, ...)$ est constante p.s. Supposons, sans perte de généralité, que F est bornée, donc Y dans $\mathbf{L}^1$.

1. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, ..., \xi_n)$, $\mathcal{G}_n = \sigma(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ...)$, $X_n = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ et $Z_n = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}_n]$. Que peut-on dire de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n assez grand tel que

$$\mathbb{E}[|X_n - Y|] \leq \varepsilon \qquad et \qquad \mathbb{E}[|Z_n - \mathbb{E}(Y)|] \leq \varepsilon\,.$$

2. Montrer qu'il existe un entier n et une fonction mesurable $g : E^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mathbb{E}[|F(\xi_1, \xi_2, ...) - g(\xi_1, ..., \xi_n)|] \leq \varepsilon\,.$$

   En déduire que

$$\mathbb{E}[|Z_n - g(\xi_{n+1}, ..., \xi_{2n})|] \leq \varepsilon\,.$$

3. Conclure.

4. Donner un exemple d'application qui ne peut pas être déduit de la loi du $0-1$ de Kolmogorov.

Correction :

1. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une filtration, Y est dans $\mathbf{L}^1$ et pour tout n, $X_n = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$, donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une martingale fermée (c'est sa définition !) donc uniformément intégrable. Elle converge donc p.s. et dans $\mathbf{L}^1$ vers $X_\infty = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_\infty]$ où $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\xi_1, \xi_2, ...)$. Y étant $\mathcal{F}_\infty$-mesurable, (X_n) converge donc p.s. et dans $\mathbf{L}^1$ vers Y.

   D'autre part $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de tribus, Y est (toujours) dans $\mathbf{L}^1$ et pour tout n, $Z_n = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}_n]$, donc par le théorème de convergence des martingales rétrogrades on sait que (Z_n) converg p.s. et dans $\mathbf{L}^1$ vers $Z_\infty = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}_\infty]$, où $\mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\mathcal{G}_n$. Or on sait par la loi du tout ou rien que $\mathcal{G}_\infty$ est grossière (i.e., ne contient que l'ensemble vide et l'espace tout entier), donc $Z_\infty = \mathbb{E}(Y)$.

   On en déduit immédiatement que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n assez grand tel que

$$\mathbb{E}[|X_n - Y|] \leq \varepsilon \qquad et \qquad \mathbb{E}[|Z_n - \mathbb{E}(Y)|] \leq \varepsilon\,. \tag{1}$$

2. X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, donc il existe une fonction mesurable $g : E^n \to \mathbb{R}$ telle que $X_n = g(\xi_1, ..., \xi_n)$. La première inégalité de (1) s'écrit donc

$$\mathbb{E}[|F(\xi_1, \xi_2, ...) - g(\xi_1, ..., \xi_n)|] \leq \varepsilon\,.$$

   La suite $(\xi_{n+1}, ..., \xi_{2n}, \xi_1, ..., \xi_n, \xi_{2n+1}, ...)$ a même loi que la suite $(\xi_1, \xi_2, ...)$, donc cette majoration donne aussi

$$\mathbb{E}[|F(\xi_{n+1}, ..., \xi_{2n}, \xi_1, ..., \xi_n, \xi_{2n+1}, ...) - g(\xi_{n+1}, ..., \xi_{2n})|] \leq \varepsilon\,.$$

   Or F est symétrique, donc $F(\xi_{n+1}, ..., \xi_{2n}, \xi_1, ..., \xi_n, \xi_{2n+1}, ...) = Y$ et on obtient

$$\mathbb{E}[|Y - g(\xi_{n+1}, ..., \xi_{2n})|] \leq \varepsilon\,. \tag{2}$$

   Par l'inégalité de Jensen, on remarque que pour toute variable aléatoire U intégrable et toute sous-tribu $\mathcal{A}$, on a $\mathbb{E}[|U|] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[|U||\mathcal{A}]] \geq \mathbb{E}[|\mathbb{E}[U|\mathcal{A}]|]$, donc en appliquant ceci à $U = Y - g(\xi_{n+1}, ..., \xi_{2n})$ et $\mathcal{A} = \mathcal{G}_n$, par (2) on obtient

$$\mathbb{E}[|\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}_n] - \mathbb{E}[g(\xi_{n+1}, ..., \xi_{2n})|\mathcal{G}_n]|] \leq \varepsilon$$

   soit

$$\mathbb{E}[|Z_n - g(\xi_{n+1}, ..., \xi_{2n})|] \leq \varepsilon\,. \tag{3}$$

3. En combinant la deuxième inégalité de (1) avec (2) et (3) on obtient

$$\mathbb{E}[|Y - \mathbb{E}(Y)|] \leq 3\varepsilon\,,$$

   et ε étant arbitraire on en déduit que $Y = \mathbb{E}(Y)$ p.s.

4. Si (X_n) est une suite i.i.d. alors l'évènement

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \text{ pour une infinité de } n \right\},$$

est symétrique (sa fonction indicatrice est symétrique) mais n'est pas dans la tribu asymptotique.