PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 6
MARTINGALES - CONVERGENCE $\mathbf{L}^p$ - UNIFORME INTÉGRABILITÉ

Exercice 1 (Série aléatoire)**.**
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables indépendantes de Bernoulli de paramètre $1/2$, i.e. $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$ et α_n une suite de réels positifs. On considère la série

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i.$$

1. Montrer que si $\sum \alpha_i^2 < \infty$ alors S_n converge presque sûrement.
2. ($\star$) Montrer que si $\sum \alpha_i^2 = \infty$ alors S_n oscille indéfiniment presque sûrement.

Exercice 2 (Théorème de Kakutani)**.**
Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes positives de moyenne 1. Pour $n \geq 0$ on pose

$$M_n = \prod_{k=1}^{n} X_k \qquad (M_0 = 1).$$

1. Montrer que (M_n) est une martingale qui converge p.s. vers M_∞.

   On pose pour $n \geq 1$, soit $a_n = \mathbb{E}[\sqrt{X_n}] \in]0,1]$ et

   $$N_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{X_k}}{a_k} \qquad (N_0 = 1).$$

2. En utilisant le processus (N_n) montrer que les cinq conditions suivantes sont équivalentes

   (a) $\mathbb{E}[M_\infty] = 1$,
   (b) $M_n \to M_\infty$ dans $\mathbf{L}^1$ quand $n \to \infty$,
   (c) la martingale (M_n) est uniformément intégrable,
   (d) $\prod_{k=1}^{\infty} a_k > 0$,
   (e) $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - a_k) < \infty$.

   Montrer que si l'une des conditions précédentes n'est pas remplie alors $M_\infty = 0$ presque sûrement.

Exercice 3 (Loi du logarithme itéré.)**.**
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Le but de l'exercice est de montrer que p.s. on a

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log n}} \leq 1\,.$$

On pose $h(x) = \sqrt{2x \log\log x}$ pour $x \geq e$.

1. Montrer que pour tous $\theta > 0$ et $c > 0$, on a :
$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c\right) \leq e^{-\theta c}\mathbb{E}\left(e^{\theta S_n}\right) .$$
En déduire que :
$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c\right) \leq e^{-\frac{c^2}{2n}} .$$

2. Soit $K > 1$. Majorer la quantité
$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq K^n} S_k \geq Kh(K^{n-1})\right)$$
et montrer que $\limsup\limits_{n\to\infty} h(n)^{-1}S_n \leq K$, p.s. Conclure.

Remarque : Il est possible de montrer que $\limsup \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1$ p.s.

Exercice 4 (La loi du tout ou rien de Hewitt-Savage.)**.** *Tiré du poly de J.-F. Le Gall.*
Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. L'application $\omega \to (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ...)$ définit une v.a. à valeurs dans l'espace produit $E^{\mathbb{N}^*}$, qui est muni de la tribu produit, la plus petite tribu rendant mesurable les applications coordonnées $(x_1, x_2, ...) \to x_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Une fonction mesurable F définie sur $E^{\mathbb{N}^*}$ est dite symétrique si
$$F(x_1, x_2, ...) = F(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, ...)$$
pour toute permutation π de $\mathbb{N}^*$ à support fini. On veut montrer que si F est une fonction symétrique sur $E^{\mathbb{N}^*}$, la variable aléatoire $Y := F(\xi_1, \xi_2, ...)$ est constante p.s. Supposons, sans perte de généralité, que F est bornée, donc Y dans $\mathbb{L}^1$.

1. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, ..., \xi_n)$, $\mathcal{G}_n = \sigma(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ...)$, $X_n = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ et $Z_n = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}_n]$. Que peut-on dire de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n assez grand tel que
$$\mathbb{E}[|X_n - Y|] \leq \varepsilon \qquad et \qquad \mathbb{E}[|Z_n - \mathbb{E}(Y)|] \leq \varepsilon .$$

2. Montrer qu'il existe un entier n et une fonction mesurable $g : E^n \to \mathbb{R}$ telle que
$$\mathbb{E}[|F(\xi_1, \xi_2, ...) - g(\xi_1, ..., \xi_n)|] \leq \varepsilon .$$
En déduire que
$$\mathbb{E}[|Z_n - g(\xi_{n+1}, ..., \xi_{2n})|] \leq \varepsilon .$$

3. Conclure.

4. Donner un exemple d'application qui ne peut pas être déduit de la loi du $0-1$ de Kolmogorov.