6 Chaînes de Markov (Définition, Propriété de Markov, Classification)

Notations, rappels : Dans toute la suite, à une chaîne de Markov donnée, par exemple (X_n), définie sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans un espace d'états dénombrable (S par exemple) est associée une fonction de transition, généralement notée Q. Dans certains cas, X est issue d'un état x_0 donné. Dans d'autres cas, la valeur que peut prendre X_0 est variable, c'est le cas par exemple si on considère que (X_n) est une marche aléatoire et qu'on fait varier son point de départ. Dans ce cas, on notera $\mathbb{P}_x$ la loi de probabilité sous laquelle (X_n) est une chaîne de Markov issue de x (i.e., $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$) - sous entendu de même fonction de transition -, et on notera $\mathbb{E}_x$ l'espérance correspondante. Dans tous les cas, (Y_n) est une chaîne de Markov indépendante de (X_n) de même fonction de transition que (X_n), issue de x sous la loi $\mathscr{L}_x$ (l'espérance correspondante est notée $\mathscr{E}_x$). On utilise cette chaîne auxiliaire quand on écrit la propriété de Markov pour ne pas utiliser deux fois la notation (X_n) alors qu'on parle de deux chaînes, de même fonction de transition, mais potentiellement issues de deux points différents. Finalement, si Q est une fonction de transition, pour toute fonction $f : S \to \mathbb{R}^+$, on notera pour tout $x \in S$:

$$Qf(x) = \sum_{y \in S} Q(x,y) f(y).$$

On remarque que

$$Qf(x) = \mathbb{E}_x[f(X_1)] = \mathscr{E}_x[f(Y_1)].$$

Exercice 6.1 (Marche aléatoire symétrique)**.** Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$.

1. Montrer, pour $a \in \mathbb{N}$, que $T_a = T_a(S_0, S_1, ...) = \inf\{n \in \mathbb{N} \,|\, S_n = a\}$ est fini p.s. (on pourra considérer $a - S_{n \wedge T_a}$).
2. Montrer que $(T_{a+1} - T_a)_{a \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a.i.i.d..

Exercice 6.2 (Chaîne de Markov et indépendance)**.** Soient S un ensemble dénombrable, $(G, \mathscr{G})$ un ensemble mesurable, $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(G, \mathscr{G})$ et $\phi : S \times G \longrightarrow S$ une application mesurable. On définit une suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans S par $X_0 = x \in S$ et $X_{n+1} = \phi(X_n, Z_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa fonction de transition.

Exercice 6.3 (Probabilité d'extinction pour un Galton-Watson)**.** Soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ un processus de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu = (p_k)_{k\geq 0}$ telle que $p_0 + p_1 < 1$. On pose $f(x) = \sum_{k\geq 0} p_k x^k$ la fonction génératrice de la loi de reproduction et $m = f'(1) = \sum k p_k$. Le but du problème est de calculer la probabilité d'extinction du processus (Z_n).

1. Montrer que (Z_n) est une chaîne de Markov de probabilité de transition donnée par
$$Q(0,0) = 1, \quad \text{et} \quad Q(i,j) = \mu^{*i}(j) \quad \text{si } i \geq 1.$$
2. Montrer que
$$\mathbb{E}_i[s^{Z_n}] = \sum_{j=0}^{\infty} Q^n(i,j) s^j = (f_n(s))^i,$$
où la suite de fonction (f_n) est définie par récurrence $f_1 = f$ et $f_{n+1} = f_n \circ f$.

3. On pose $\tau_0 = \inf\{n \geq 0 : Z_n = 0\}$. Montrer que $\mathbb{P}_1(\tau_0 < \infty) = \lim_{n\to\infty} f_n(0)$.

4. En étudiant la fonction f en déduire que $\mathbb{P}_1(\tau_0 < \infty)$ est la plus petite solution de $f(t) = t$ dans $[0,1]$. En particulier remarquez que f est convexe et admet une solution $f(t) = t$ strictement plus petite que 1 si et seulement si $m > 1$.

Exercice 6.4 (Questions “simples” sur la classification des états)**.** On notera génériquement $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de fonction de transition Q à valeurs dans un espace d'états dénombrable S. On notera $N_x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}$.

1. Donner un exemple où l'ensemble des points visités par la chaîne issue de x n'est pas déterministe, i.e. constant p.s.

2. Donner un exemple où, sans que x soit récurrent, sous $\mathbb{P}_x$, l'ensemble des points visités par la chaîne est p.s. toujours le même. Donner un exemple où, de plus, l'ordre des 3 premiers points visités en partant de x n'est pas déterministe .

3. Pour $x, y \in S$, a-t-on : y récurrent et il existe n tel que $Q^n(x,y) > 0 \Rightarrow N_y = \infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s. ?

4. Donner un exemple où il existe n tel que $Q^n(x,y) > 0$ mais pour tout p, $Q^p(y,x) = 0$.

5. Montrer que pour $x, y \in S$, $\mathbb{E}_x(N_y) = \infty \Rightarrow y$ récurrent. La réciproque est-elle vraie ?

6. Peut-on avoir $0 < \mathbb{E}_x(N_y) < \infty$, avec y récurrent ?

7. Si $\mathbb{E}_x(N_y) = \infty$, quelles valeurs peut prendre $\mathbb{E}_y(N_x)$?

8. On suppose que pour tout $x \in S$, l'ensemble $V_x = \{y \in S \,|\, \exists n\, t.q.\, Q^n(x,y) > 0\}$ est fini. Montrer qu'il existe des états récurrents.

9. On suppose qu'il existe un état $x_0 \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $\sum Q^n(x_0, x) > 0$ et $\mathbb{P}_x(\tau_{x_0} < \infty) = 1$ avec τ_{x_0} le temps d'atteinte de x_0. Est-ce que la chaîne est récurrente ?

Exercice 6.5 (Chaînes irréductibles)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace dénombrable S de fonction de transition Q. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible si et seulement si il n'existe pas de sous-ensemble strict non vide F de S tel que

$$\forall x \in F,\ \forall y \in F^c, \qquad Q(x,y) = 0\,.$$

Exercice 6.6 (Chaîne avec loi de transition binomiale)**.** Soit Q la matrice de transition sur $S = \{0, \ldots, N\}$ définie par

$$Q(i,j) = C_N^j \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j}.$$

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans S de fonction de transition Q.

1. Classifier les états de $(X_n)_{n\geq 0}$.

2. Montrer que pour tout $k \in S$, $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_k$ et que la limite

   $$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$$

   existe $\mathbb{P}_k$ p.s.. Déterminer la loi de X_∞ sous $\mathbb{P}_k$.