6 Chaînes de Markov (Définition, Propriété de Markov, Classification)

Notations, rappels : Dans toute la suite, à une chaîne de Markov donnée, par exemple (X_n), définie sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans un espace d'états dénombrable (S par exemple) est associée une fonction de transition, généralement notée Q. Dans certains cas, X est issue d'un état x_0 donné. Dans d'autres cas, la valeur que peut prendre X_0 est variable, c'est le cas par exemple si on considère que (X_n) est une marche aléatoire et qu'on fait varier son point de départ. Dans ce cas, on notera $\mathbb{P}_x$ la loi de probabilité sous laquelle (X_n) est une chaîne de Markov issue de x (i.e., $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$) - sous entendu de même fonction de transition -, et on notera $\mathbb{E}_x$ l'espérance correspondante. Dans tous les cas, (Y_n) est une chaîne de Markov indépendante de (X_n) de même fonction de transition que (X_n), issue de x sous la loi $\mathscr{L}_x$ (l'espérance correspondante est notée $\mathscr{E}_x$). On utilise cette chaîne auxiliaire quand on écrit la propriété de Markov pour ne pas utiliser deux fois la notation (X_n) alors qu'on parle de deux chaînes, de même fonction de transition, mais potentiellement issues de deux points différents. Finalement, si Q est une fonction de transition, pour toute fonction $f : S \to \mathbb{R}^+$, on notera pour tout $x \in S$:

$$Qf(x) = \sum_{y \in S} Q(x,y) f(y).$$

On remarque que

$$Qf(x) = \mathbb{E}_x[f(X_1)] = \mathscr{E}_x[f(Y_1)].$$

Exercice 6.1 (Marche aléatoire symétrique). Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$.

1. Montrer, pour $a \in \mathbb{N}$, que $T_a = T_a(S_0, S_1, \ldots) = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid S_n = a\}$ est fini p.s. (on pourra considérer $a - S_{n \wedge T_a}$).

2. Montrer que $(T_{a+1} - T_a)_{a \in \mathbb{N}}$ est une suite de v.a.i.i.d..

Correction :

1. Les ξ_i sont centrés et indépendants, donc (S_n) est une martingale par rapport à la filtration canonique, et donc il en est de même de $(a - S_{n \wedge T_a})$, qui de plus est positive. On en déduit qu'elle converge presque sûrement. Comme sur $\{T_a = \infty\}$, S_n n'est pas de Cauchy (elle fait des sauts de norme 1), T_a est fini p.s.

2. On doit montrer ici que pour tout $a \in \mathbb{N}$, pour toutes fonctions $f_0, \ldots, f_a$ mesurables positives bornées, on a

$$\mathbb{E}[f_0(T_1 - T_0) \cdots f_a(T_{a+1} - T_a)] = \mathbb{E}[f_0(T_1 - T_0)] \cdots \mathbb{E}[f_a(T_1 - T_0)]. \tag{1}$$

   • On remarque que T_a est un temps d'arrêt pour la filtration canonique $(\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc pour tout a, T_a est $\mathscr{F}_{T_a}$-mesurable. De plus, $T_a \leq T_{a+1}$ donc $\mathscr{F}_{T_a} \subset \mathscr{F}_{T_{a+1}}$. On en déduit que pour montrer (1) par récurrence sur a, il suffit de montrer $(*)$: pour tout $a \in \mathbb{N}$, $(T_{a+1} - T_a)$ est indépendant de $\mathscr{F}_{T_a}$ et pour toute fonction f mesurable positive bornée, $\mathbb{E}[f(T_{a+1} - T_a)] = \mathbb{E}[f(T_1 - T_0)]$.

• On remarque que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov (exemple standard...), issue de 0 (i.e., $S_0 = 0$ p.s.). On sait que $T_{a+1} \geq T_a$, on a donc p.s.,

$$\begin{aligned} T_{a+1}(S_0, S_1, \ldots) &= \inf\{n \in \mathbb{N}; S_n = a+1\} \\ &= T_a(S_0, S_1, \ldots) + \inf\{n \in \mathbb{N}; S_{T_a+n} = a+1\} \\ &= T_a(S_0, S_1, \ldots) + (T_{a+1} - T_a)(S_{T_a}, S_{T_a+1}, \ldots), \end{aligned}$$

donc

$$(T_{a+1} - T_a)(S_0, S_1, \ldots) = (T_{a+1} - T_a)(S_{T_a}, S_{T_a+1}, \ldots).$$

On en déduit que pour toute v.a. Z $\mathscr{F}_{T_a}$-mesurable, par la propriété de markov forte en T_a (ici on n'a pas besoin de faire apparaître $\mathbb{1}_{T_a<\infty}$ car le temps d'arrêt est fini p.s.), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Zf((T_{a+1} - T_a)(S_0, S_1, \ldots))] &= \mathbb{E}[Zf((T_{a+1} - T_a)(S_{T_a}, S_{T_a+1}, \ldots))] \\ &= \mathbb{E}[Z\mathbb{E}[f((T_{a+1} - T_a)(S_{T_a}, S_{T_a+1}, \ldots))|\mathscr{F}_{T_a}]] \\ &= \mathbb{E}[Z\mathscr{E}_{S_{T_a}}(f((T_{a+1} - T_a)(Y_0, Y_1, \ldots)))] \\ &= \mathbb{E}[Z\mathscr{E}_a[f((T_{a+1} - T_a)(Y_0, Y_1, \ldots))]] \\ &= \mathbb{E}[Z]\mathscr{E}_a[f((T_{a+1} - T_a)(Y_0, Y_1, \ldots))] \\ &= \mathbb{E}[Z]\mathscr{E}_0[f((T_1 - T_0)(Y_0, Y_1, \ldots))] \\ &= \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[f((T_1 - T_0)(S_0, S_1, \ldots))], \end{aligned}$$

où $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de même fonction de transition que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, issue p.s. de x sous la loi $\mathscr{L}_x$ (dont on note l'espérance $\mathscr{E}_x$). On a utilisé ici le fait que $S_{T_a} = a$ p.s., et que si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de loi $\mathscr{L}_0$, $(a + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour loi $\mathscr{L}_a$. On en déduit que $(T_{a+1} - T_a)$ est indépendant de $\mathscr{F}_{T_a}$, et que $(T_{a+1} - T_a)$ est bien de même loi que $(T_1 - T_0)$, ce qui achève la démonstration.

Exercice 6.2 (Chaîne de Markov et indépendance)**.** Soient S un ensemble dénombrable, $(G, \mathscr{G})$ un ensemble mesurable, $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(G, \mathscr{G})$ et $\phi : S \times G \longrightarrow S$ une application mesurable. On définit une suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans S par $X_0 = x \in S$ et $X_{n+1} = \phi(X_n, Z_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa fonction de transition.

Correction : Soient $n \geq 0$ et $(x_0, \ldots, x_n) \in S^n$. On a par indépendance:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) \\ &\quad= \mathbb{P}(X_0 = x_0, \phi(x_0, Z_1) = x_1, \phi(x_1, Z_2) = x_2, \ldots, \phi(x_{n-1}, Z_n) = x_n) \\ &\quad= \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(\phi(x, Z_1) = x_1)\mathbb{P}(\phi(x_1, Z_2) = x_2)\ldots\mathbb{P}(\phi(x_{n-1}, Z_n) = x_n) \\ &\quad= \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(\phi(x, Z_1) = x_1)\mathbb{P}(\phi(x_1, Z_1) = x_2)\ldots\mathbb{P}(\phi(x_{n-1}, Z_1) = x_n). \end{aligned}$$

On pose, pour $(y, z) \in S^2$, $Q(y, z) = \mathbb{P}(\phi(y, Z_1) = z)$. On peut alors écrire

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)Q(x_0, x_1)Q(x_1, x_2)\ldots Q(x_{n-1}, x_n).$$

Cela signfie que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de fonction de transition Q.

Exercice 6.3 (Probabilité d'extinction pour un Galton-Watson)**.** Soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ un processus de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu = (p_k)_{k\geq 0}$ telle que $p_0 + p_1 < 1$. On pose $f(x) = \sum_{k\geq 0} p_k x^k$ la fonction génératrice de la loi de reproduction et $m = f'(1) = \sum k p_k$. Le but du problème est de calculer la probabilité d'extinction du processus (Z_n).

1. Montrer que (Z_n) est une chaîne de Markov de probabilité de transition donnée par
$$Q(0,0) = 1, \quad \text{et} \quad Q(i,j) = \mu^{*i}(j) \quad \text{si } i \geq 1.$$

2. Montrer que
$$\mathbb{E}_i[s^{Z_n}] = \sum_{j=0}^{\infty} Q^n(i,j) s^j = (f_n(s))^i,$$
où la suite de fonction (f_n) est définie par récurrence $f_1 = f$ et $f_{n+1} = f_n \circ f$.

3. On pose $\tau_0 = \inf\{n \geq 0 : Z_n = 0\}$. Montrer que $\mathbb{P}_1(\tau_0 < \infty) = \lim_{n\to\infty} f_n(0)$.

4. En étudiant la fonction f en déduire que $\mathbb{P}_1(\tau_0 < \infty)$ est la plus petite solution de $f(t) = t$ dans $[0,1]$. En particulier remarquez que f est convexe et admet une solution $f(t) = t$ strictement plus petite que 1 si et seulement si $m > 1$.

Correction :

1. Non corrigé. On rappelle que la notation μ^{*i} signifie la i-ième convolée de μ.

2. On montre le résultat par récurrence. Pour $n = 1$, on a
$$\sum_{j=0}^{\infty} Q(i,j) s^j = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{*i}(j) s^j = (f(s))^i,$$
d'après les propriétés classiques de la convolution vis-à-vis des fonctions génératrices. Pour $n \geq 2$, on applique la propriété de Markov faible en n et l'hypothèse de récurrence pour obtenir
$$\mathbb{E}_i[s^{Z_{n+1}}] = \mathbb{E}_i\left[\mathscr{E}_{Z_n}[s^{Z_1}]\right] = \mathbb{E}_i[(f(s))^{Z_n}] = (f_n(f(s)))^i = (f_{n+1}(s))^i,$$
comme demandé.

3. On remarque que $\{\tau_0 \leq n\} = \{Z_n = 0\}$, or $\mathbb{P}_1(Z_n = 0) = f_n(0)$. Ainsi on a
$$\mathbb{P}_1(\tau_0 \leq n) = f_n(0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}_1(\tau_0 < \infty).$$

4. C'est une étude classique de fonction définie par récurrence.

Exercice 6.4 (Propriété de Markov faible)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace dénombrable S, de fonction de transition Q, issue de x sous $\mathbb{P}_x$. Soit F un sous-ensemble non vide de S. On pose
$$T_F = T_F(X_0, X_1, \ldots) = \inf\{n \geq 0 : X_n \in F\}.$$

1. Montrer que pour toute fonction h positive bornée définie sur F, la fonction g définie par

$$\forall x \in S \qquad g(x) = \mathbb{E}_x\left(h(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F<\infty\}}\right)$$

est solution du problème suivant:

$$\begin{aligned} g(x) &= Qg(x), \ \forall x \in F^c \\ g(x) &= h(x), \ \forall x \in F\,. \end{aligned}$$

On va montrer que g est la solution positive minimale de ce problème.

2. Soit f une autre solution positive de ce problème. Montrer que pour tout $n \geq 0$

$$f(x) = \mathbb{E}_x\left(f(X_{n\wedge T_F})\right).$$

3. En déduire que $f \geq g$.

Correction :

1. Pour $x \in F$, $\mathbb{P}_x$-p.s, on a $T_F = 0$, et donc $g(x) = \mathbb{E}_x(h(X_0)) = h(x)$. Pour $x \notin F$, $\mathbb{P}_x$-p.s., on a $T_F \geq 1$ et donc

$$T_F(X_0,X_1,\ldots) = \inf\{n \geq 1 \,|\, X_n \in F\} = 1 + \inf\{n \geq 0 \,|\, X_{n+1} \in F\} = 1 + T_F(X_1,X_2,\ldots),$$

donc d'après la propriété de Markov faible appliquée au temps 1,

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathbb{E}_x[h(X_{T_F(X_0,X_1,\ldots)})\mathbb{1}_{T_F(X_0,X_1,\ldots)<\infty}] \\ &= \mathbb{E}_x[h(X_{1+T_F(X_1,X_2,\ldots)})\mathbb{1}_{T_F(X_1,X_2,\ldots)<\infty}] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathscr{E}_{X_1}(h(Y_{T_F(Y_0,Y_1,\ldots)})\mathbb{1}_{T_F(Y_0,Y_1,\ldots)<\infty})] \\ &= \mathbb{E}_x[g(X_1)] \\ &= Qg(x), \end{aligned}$$

où $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans toute la suite une chaîne de Markov de même fonction de transition que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, issue p.s. de y sous la loi $\mathscr{L}_y$ (d'espérance notée $\mathscr{E}_y$), et Qg est défini dans l'introduction de ce TD. Ainsi, g est solution du problème.

2. On va montrer le résultat par récurrence sur n. C'est évident pour $n = 0$. Soit $n \geq 0$. On suppose le résultat démontré au rang n. On a

$$\mathbb{E}_x\left[f\left(X_{(n+1)\wedge T_F}\right)\right] = \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{n+1}\right)\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right] + \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{T_F}\right)\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}}\right].$$

L'ensemble $\{T_F \geq n+1\}$ est $\mathscr{F}_n$-mesurable (avec $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0,\ldots,X_n)$), donc d'après la propriété de Markov faible appliquée au temps n (ou la définition même de la chaîne de Markov), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{n+1}\right)\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right] &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}\left(f\left(X_{n+1}\right)\mid\mathscr{F}_n\right)\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathscr{E}_{X_n}\left(f\left(Y_1\right)\right)\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[Qf\left(X_n\right)\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[f\left(X_n\right)\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right], \end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue car f est solution du problème et $X_n \notin F$ si $T_F \geq n+1$. On a donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\mathbb{E}_x\left[f\left(X_{(n+1)\wedge T_F}\right)\right] = \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{n\wedge T_F}\right)\right] = f(x).$$

3. D'après la question 2., pour tout $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{n\wedge T_F}\right)\right] \\ &\geq \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{T_F}\right)\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[h\left(X_{T_F}\right)\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}}\right]. \end{aligned}$$

Or la suite $\left(h\left(X_{T_F}\right)\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}}\right)_{n\geq 0}$ est croissante et positive et

$$h\left(X_{T_F}\right)\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} h\left(X_{T_F}\right)\mathbb{1}_{\{T_F<\infty\}}.$$

Donc, d'après le TCM,

$$\mathbb{E}_x\left[h\left(X_{T_F}\right)\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}_x\left[h\left(X_{T_F}\right)\mathbb{1}_{\{T_F<\infty\}}\right] = g(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in S$, $f(x) \geq g(x)$.

Exercice 6.5 (Questions "simples" sur la classification des états)**.** On notera génériquement $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de fonction de transition Q à valeurs dans un espace d'états dénombrable S. On notera $N_x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}$.

1. Donner un exemple où l'ensemble des points visités par la chaîne issue de x n'est pas déterministe, i.e. constant p.s.

2. Donner un exemple où, sans que x soit récurrent, sous $\mathbb{P}_x$, l'ensemble des points visités par la chaîne est p.s. toujours le même. Donner un exemple où, de plus, l'ordre des 3 premiers points visités en partant de x n'est pas déterministe .

3. Pour $x, y \in S$, a-t-on : y récurrent et il existe n tel que $Q^n(x,y) > 0 \Rightarrow N_y = \infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s. ?

4. Donner un exemple où il existe n tel que $Q^n(x,y) > 0$ mais pour tout p, $Q^p(y,x) = 0$.

5. Montrer que pour $x, y \in S$, $\mathbb{E}_x(N_y) = \infty \Rightarrow y$ récurrent. La réciproque est-elle vraie ?

6. Peut-on avoir $0 < \mathbb{E}_x(N_y) < \infty$, avec y récurrent ?

7. Si $\mathbb{E}_x(N_y) = \infty$, quelles valeurs peut prendre $\mathbb{E}_y(N_x)$?

8. On suppose que pour tout $x \in S$, l'ensemble $V_x = \{y \in S \mid \exists n\, t.q.\, Q^n(x,y) > 0\}$ est fini. Montrer qu'il existe des états récurrents.

9. On suppose qu'il existe un état $x_0 \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $\sum Q^n(x_0,x) > 0$ et $\mathbb{P}_x(\tau_{x_0} < \infty) = 1$ avec τ_{x_0} le temps d'atteinte de x_0. Est-ce que la chaîne est récurrente ?

Correction :

On notera génériquement $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de fonction de transition Q à valeurs dans un espace d'états dénombrable S. On notera $N_x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}$.

1. On prend $S = \{-1, 0, 1\}$, $Q(1,1) = Q(-1,-1) = 1$ et $Q(0,1) = Q(0,-1) = 1/2$. Alors, sous $\mathbb{P}_0$, l'ensemble des points visités est $\{0,1\}$ avec probabilité $1/2$, et $\{0,-1\}$ avec probabilité $1/2$. On pourrait rendre cet exemple moins "déterministe" en prenant $S = \mathbb{Z}$, et Q vérifiant $Q(0,1) = Q(0,-1) = 1/2$, pour tout $x > 0$, $Q(x,\cdot)$ concentrée sur $\mathbb{N}^*$, et pour tout $x < 0$, $Q(x,\cdot)$ concentrée sur $-\mathbb{N}^*$.

2. Pour $S = \{0,1\}$ et $Q(0,1) = 1 = Q(1,1)$, on voit que $x = 0$ n'est pas récurrent, et l'ensemble des points visités par la chaîne est $\{0,1\}$ $\mathbb{P}_0$-p.s..

   Pour $S = \{0,1,2\}$ et $Q(i,1) = Q(i,2) = 1/2$ pour $i = 0,1,2$, on voit que $x = 0$ n'est pas récurrent, que l'ensemble des points visités est $\{0,1,2\}$ $\mathbb{P}_0$-p.s., et que le deuxième point visité est 1 ou 2 avec probabilité $1/2$.

3. La réponse est non. Il suffit de reprendre l'exemple de la question 1., on voit que 1 est récurrent, $Q(0,1) > 0$ mais $\mathbb{P}_0(N_1 = \infty) = 1/2$.

4. Toujours avec le même exemple, $Q(0,1) > 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Q^p(1,0) = 0$.

5. On a, par la propriété de Markov en $H_y = \inf\{n \geq 1 \,|\, X_n = y\}$, en notant (Y_n) une autre chaîne de même fonction de transition et issue de x sous la loi $\mathscr{L}_x$ (d'espérance $\mathscr{E}_x$):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x(N_y) &= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{H_y<\infty} \sum_{n\geq H_y} \mathbb{1}_{X_n=y}\right) \\
&= \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{H_y<\infty} \mathscr{E}_{X_{H_y}}(\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{Y_n=y})\right) \\
&= \mathbb{P}_x(H_y < \infty)\mathscr{E}_y(\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{Y_n=y}) \\
&= \mathbb{P}_x(H_y < \infty)\mathbb{E}_y(N_y)\,,
\end{aligned}$$

   donc si $\mathbb{E}_x(N_y) = \infty$, comme $\mathbb{P}_x(H_y < \infty)$ est borné, on a $\mathbb{E}_y(N_y) = \infty$, i.e. y est récurrent.

   La réciproque est fausse, cf l'exemple 1. avec 1 récurrent, mais $Q^n(-1,1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (1 et -1 sont récurrents, mais pas dans la même classe).

6. Non, car $\mathbb{E}_x(N_y) = \mathbb{P}_x(H_y < \infty)\mathbb{E}_y(N_y)$ (cf question 5.) et $\mathbb{E}_y(N_y) = \infty$, donc $\mathbb{E}_x(N_y) = 0$ ou ∞ selon que $\mathbb{P}_x(H_y < \infty) = 0$ ou > 0.

7. Si $\mathbb{E}_x(N_y) = \infty$, alors y est récurrent (cf 5.). On en déduit que $\mathbb{E}_y(N_x)$ ne peut prendre que 2 valeurs : $\mathbb{E}_y(N_x) = \infty$ si x est récurrent et dans la même classe que y, et $\mathbb{E}_y(N_x) = 0$ sinon.

8. Soit $x \in E$. Sous $\mathbb{P}_x$, la chaîne (de matrice de transition Q) reste p.s. dans V_x, donc sous $\mathbb{P}_x$,

$$\forall k \geq 0 \qquad \sum_{y\in V_x} Q^k(x,y) = 1\,,$$

donc
$$\sum_{y\in V_x}\sum_{k\geq 0} Q^k(x,y) = \sum_{k\geq 0}\sum_{y\in V_x} Q^k(x,y) = +\infty\,.$$
V_x étant fini, il existe $y \in V_x$ tel que $\mathbb{E}_x(N_y) = \sum_{k\geq 0} Q^k(x,y) = \infty$, ce qui implique (cf 5.) que y est récurrent.

9. Oui. Il suffit de voir que x_0 est récurrent ou encore que $\mathbb{P}_{x_0}(H_{x_0} < \infty) = 1$ où $H_{x_0} = \inf\{n \geq \mathbf{1} : X_n = x_0\}$ est le premier temps de retour strict en x_0. D'après la propriété de Markov appliquée au temps $n = 1$ on a
$$\mathbb{E}_{x_0}\left[\mathbf{1}_{H_{x_0}<\infty}\right] = \mathbb{E}_{x_0}\left[\mathscr{E}_{X_1}[\tau_{x_0} < \infty]\right] = 1.$$

Exercice 6.6 (Chaînes irréductibles)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace dénombrable S de fonction de transition Q. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible si et seulement si il n'existe pas de sous-ensemble strict non vide F de S tel que
$$\forall x \in F,\ \forall y \in F^c, \qquad Q(x,y) = 0\,.$$

Correction : • On suppose que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible et que l'on peut trouver un sous-ensemble strict non vide F de S tel que
$$\forall x \in F,\ \forall y \in F^c, \qquad Q(x,y) = 0\,.$$
Soient $x \in F$ et $y \in F^c$. Par hypothèse $Q(x,y) = 0$ et puisque la chaîne est irréductible il existe $n \geq 2$ tel que $Q^n(x,y) > 0$, et donc une suite $x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ d'éléments de S telle que $Q(x_i, x_{i+1}) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Soit
$$k = \max\{1 \leq i \leq n-1 \,|\, x_i \in F\}\,.$$
Alors, $x_k \in F$, $x_{k+1} \in F^c$ et $Q(x_k, x_{k+1}) > 0$ ce qui est impossible.

• On suppose que pour tout sous-ensemble strict non vide F de S, il existe $x \in F$, $y \in F^c$ tels que $Q(x,y) > 0$. Pour $x \in S$, on note $S_x = \{y \in E : \exists n \in \mathbb{N}\, t.q.\, Q^n(x,y) > 0\}$. On veut montrer que $S_x = S$. L'ensemble S_x est non vide car il contient x. Supposons que $S_x \subsetneq S$. Soient $a \in S_x$ et $b \in S_x^c$ tels que $Q(a,b) > 0$ (ils existent par hypothèse). On a $a \in S_x$ donc il existe $n \geq 0$ tel que $Q^n(x,a) > 0$, d'où
$$Q^{n+1}(x,b) \geq Q^n(x,a)Q(a,b) > 0\,.$$
Ceci est absurde car alors $b \in S_x$. Cela signifie que $S_x = S$ et ceci pour tout $x \in S$. La chaîne est donc irréductible.

Exercice 6.7 (Chaîne avec loi de transition binomiale)**.** Soit Q la matrice de transition sur $S = \{0, \ldots, N\}$ définie par
$$Q(i,j) = C_N^j \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j}.$$
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans S de fonction de transition Q.

1. Classifier les états de $(X_n)_{n\geq 0}$.

2. Montrer que pour tout $k \in S$, $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_k$ et que la limite

$$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$$

existe $\mathbb{P}_k$ p.s.. Déterminer la loi de X_∞ sous $\mathbb{P}_k$.

Correction :

1. On voit que $Q(0,0) = Q(N,N) = 1$ donc les états 0 et N sont absorbants, donc récurrents. De plus, pour tout $i \in \{1,\dots,N-1\}$, $Q(i,0) > 0$ et $Q(i,N) > 0$ donc la probabilité en partant de i de ne jamais revenir en i est strictement positive: les états $1,\dots,N-1$ sont donc transitoires.

2. Pour tout $n \geq 0$, X_n est mesurable par rapport à $\mathscr{F}_n$ où $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la filtration canonique, $0 \leq X_n \leq N$ donc X_n est intégrable sous $\mathbb{P}_k$ et, en utilisant la définition d'une chaîne de Markov, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_k(X_{n+1} \mid \sigma(X_0,\dots,X_n)) &= \mathbb{E}_k(X_{n+1}|X_n)\\
&= \mathscr{E}_{X_n}(Y_1)\\
&= \sum_{j=0}^{N} jQ(X_n,j)\\
&= \sum_{j=0}^{N} jC_N^j\left(\frac{X_n}{N}\right)^j\left(1-\frac{X_n}{N}\right)^{N-j}\\
&= N\sum_{j=1}^{N} C_{N-1}^{j-1}\left(\frac{X_n}{N}\right)^j\left(1-\frac{X_n}{N}\right)^{N-j}\\
&= X_n\sum_{j=0}^{N-1} C_{N-1}^{j}\left(\frac{X_n}{N}\right)^j\left(1-\frac{X_n}{N}\right)^{N-1-j}\\
&= X_n\,,
\end{aligned}$$

où (Y_n) est une chaîne de Markov de même fonction de transition que (X_n), issue de x sous la loi $\mathscr{L}_x$ (d'espérance $\mathscr{E}_x$). Donc $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_k$. De plus, $(X_n)_{n\geq 0}$ est positive donc $(X_n)_{n\geq 0}$ converge $\mathbb{P}_k$ p.s. On note X_∞ sa limite. Puisque $(X_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $\{0,...,N\}$, cette convergence implique que $(X_n)_{n\geq 0}$ est stationnaire $\mathbb{P}_k$-p.s. D'après la question 1., X_∞ ne peut prendre que les valeurs 0 et N. Et d'après le TCD (que l'on peut utiliser car $0 \leq X_n \leq N$ pour tout $n \geq 0$), on a

$$N\mathbb{P}_k(X_\infty = N) = \mathbb{E}_k(X_\infty) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_k(X_n) = \mathbb{E}_k(X_0) = k.$$

Ainsi, la loi de X_∞ sous $\mathbb{P}_k$ est $\frac{k}{N}\delta_N + \frac{N-k}{N}\delta_0$.