Algèbre 2 Elie CASBI

TD6 : Anneaux euclidiens, principaux, factoriels

Indications de correction

Exercice 6

1. SI $fg = 0$ alors f ou g a une infinité de zéros dans le plan donc est nulle par le théorème des zéros isolés.

2. Les inversibles sont les fonctions ne s'annulant jamais. Si f est une telle fonction, f'/f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ ouvert connexe. Soit g une primitive holomorphe de f'/f. Alors $(f/exp(g))' = 0$ d'où $f = aexp(g)$ et exp étant surjective on obtient $f = exp(g + z_0)$. Réciproquement toute exponentielle de fonction holomorphe est holomorphe et inversible.

3. Si f admet un unique zéro et $f = gh$ alors g ou h ne s'annule jamais donc est inversible par ce qui précède, et f est irréductible. Réciproquement si f irréductible s'annule en z_1 et en z_2 (éventuellement égaux à un seul et même z mais de multiplicité au moins 2) alors $h := \frac{f}{(z-z_1)(z-z_2)}$ est holomorphe et $f = (z - z_1).(z - z_2)h$ produit de deux fonctions non inversibles. Contradiction.

4. Il existe des fonctions holomorphes possédant une infinité de zéros ($sin(z)$ par exemple) ; ce qui précède montre que de telles fonctions ne peuvent pas se décomposer comme produit fini d'irréductibles.

5. factoriel $\Rightarrow$ intégralement clos.

Exercice 7

1. Fait en td .

2. Si θ est un stathme alors $\theta(x) = n$ entraîne $x \in A_n$ d'où $\nu(x) \leqslant n = \theta(x)$.

Si $a \mid b$ et $b \neq 0$ et $b \in A_{n+1}\backslash A_n$, on a $A = (b) + A_n$. Or, $(b) \subset (a)$ d'où $A = (a) + A_n$ et $a \in A_{n+1}$. Ainsi $n + 1 = \nu(b) \geqslant \nu(a)$.

3. Si A est un corps, $x = 0$ convient. On suppose que A n'est pas un corps et on raisonne par l'absurde. On a $A_1 = A^\times \cup \{0\}$ et $A \neq A_1$. Pour $x \notin A_1$ on ne peut pas avoir $(x)+A_1 = A$ car sinon on aurait $\pi(A_1) = A/(x)$. Donc $A_2 = A_1$ et en réitérant le procédé on a que tous les A_n sont égaux à A_1. Comme A est euclidien, on conclut par la question **1**. : $A = A_1$ i.e. A est un corps, contradiction.