Td n° 6 d'Analyse fonctionnelle

Transformation de Fourier

Séance du 30 mars 2012

Exercice 1. *Quelques questions sur la transformée de Fourier*

1. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie non nulle. Montrer que $\widehat{\mathbb{1}_A}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$, mais pas à $L^1(\mathbb{R}^d)$.

2. Existe-t-il deux fonctions $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $f * g = 0$? Que se passe-t-il si on demande de plus que $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$?

3. Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $a_1, ...a_k$ des réels non tous nuls tel que $\sum_{i=1}^k a_i \partial^i u = 0$. Montrer que $u = 0$.

⋆

Exercice 2. *Quelques questions sur les espaces de Sobolev* H^s

1. Vérifier que $\delta_0 \in H^s$ pour $s < -d/2$. Montrer que pour $s > d/2$, H^s s'injecte continument dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$

2. Montrer que $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \cup_s H^s$.

3. Montrer que l'injection de H^{s_1} dans H^{s_2} pour $s_1 \geq s_2$ est continue.

4. On suppose maintenant que $s \in]d/2, d/2+1[$. Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1]$ et x, y, ξ :

$$|e^{ix\xi} - e^{iy\xi}| \leq 2|x-y|^\alpha |\xi|^\alpha.$$

En déduire que pour tout $\alpha \in]0, s-d/2[$, il existe $C(\alpha)$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(\alpha) \|u\|_{H^s}.$$

Conclure que $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$, ensemble des fonctions α-Holderiennes bornées.

⋆

Exercice 3. *Transformée de Fourier de* $\mathrm{vp}\, x$

On rappelle que la *valeur principale* de $1/x$ est définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), < \mathrm{vp}\, x, \phi >= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right).$$

1. Montrer que $x \,\mathrm{vp}\, x = \mathbb{1}$.

2. Montrer que $\mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x)$ est impaire au sens des distributions, c'est-à-dire que, en notant $\varphi^v(x) = \varphi(-x)$, on a $< \mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x), \varphi^v >= - < \mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x), \varphi >$.

3. En déduire $\mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x)$.

⋆

Exercice 4. *Formule sommatoire de Poisson*

On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que f' et f'' sont intégrables et qu'il existe une constante C telle que

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}.$$

On fixe une période $a \in \mathbb{R}$ et on pose $S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+na)$.

1. Montrer que S est bien définie, continue et périodique et calculer ses coefficients de Fourier.

2. Montrer la *formule sommatoire de Poisson* :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\frac{2\pi m}{a}),$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f.

3. Application : Soit $\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta(\frac{1}{x})$.

4. Application (théorème d'échantillonage de Shannon) : Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq F$. Montrer que

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT) sinc(\frac{\pi(t-nT)}{T}),$$

où $sinc(x) = \frac{sin x}{x}$ et $T = \frac{\pi}{F}$.

⋆