Td n° 6 d'Analyse fonctionnelle

Loi de Weyl

Séance du 20 Mars 2015

Rappels du TD précédent Soit Ω un ouvert connexe borné régulier de $\mathbb{R}^d$. Étant donné $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta u = f$. On note $(-\Delta)^{-1}(f) = u$.

Il existe une suite croissante $\lambda_n \to \infty$ et une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, notée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset H_0^1(\Omega)$ telle que

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n.$$

Les e_n sont dans $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Exercice 1. *Autour de la première valeur propre du Laplacien*

1. Montrer que $\sqrt{\lambda_1} = \inf_{u\in H_0^1, \|u\|_{L^2}=1} \|\nabla u\|_{L^2}$ En déduire que $1/\sqrt{\lambda_1}$ est la constante optimale dans l'inégalité de Poincaré, et que cet optimum est réalisé uniquement sur l'espace propre E_{λ_1} associé à λ_1.

2. Soit $g \in C^2(\bar{\Omega})$ telle que $-\Delta g \geq 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon < d(x, \partial\Omega)$,

$$\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} g(y)dy \leq g(x).$$

3. En déduire que si $g \in C^2(\bar{\Omega})$ est telle que $-\Delta g \geq 0$ et $g = 0$ sur $\partial\Omega$ alors soit $g > 0$ sur Ω, soit $g \equiv 0$.

4. Si $f \in E_{\lambda_1}$, montrer que $|f| \in E_{\lambda_1}$. En déduire que $-\Delta|f| \geq 0$.

5. En déduire e_1 ne change pas de signe, et que E_{λ_1} est de dimension 1 (engendré par e_1).

6. Montrer que si $\Omega = B(0,1)$ $(d \geq 2)$, e_1 est à symétrie sphérique.

⋆

Exercice 2. *Estimation de Weyl 1*

1. Principe du minimax : montrer que

$$\lambda_n = \min_{\substack{V\subset H_0^1,\\ \dim(V)\geq n}} \max_{\substack{u\in V,\\ \|u\|_{L^2}=1}} \|\nabla u\|^2.$$

2. En déduire que si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ sont deux ouverts connexes bornés, $\lambda_n(\Omega_2) \leq \lambda_n(\Omega_1)$. On note $N_\Omega(\lambda) = \#\{\lambda_n(\Omega) \leq \lambda\}$. Montrer que $N_{\Omega_2}(\lambda) \geq N_{\Omega_1}(\lambda)$.

3. Quelles sont les valeurs propres et les vecteurs propres associés quand $\Omega =]0,a[^d$?

Indication : On pourra utiliser la décomposition en série de Fourier.

4. En déduire une estimation de $N_{]0,a[^d}(\lambda)$ quand $\lambda \longrightarrow \infty$.

5. On note $\Omega_1 =]0,a[^d$ et $\Omega_2 =]0,2a[\times]0,a[^{d-1}$. Montrer que $\lambda_{2n}(\Omega_2) \leq \lambda_n(\Omega_1)$. En déduire $N_{\Omega_2}(\lambda) \geq 2N_{\Omega_1}(\lambda)$.

6. En écrivant un ouvert borné Ω comme la limite d'ouverts constitués de petites briques $[0,a]^d$ avec a de plus en plus petit, montrer que

$$\liminf_{\lambda\longrightarrow\infty} \frac{N_\Omega(\lambda)}{\lambda^{\frac{d}{2}}} \geq |\Omega| \frac{c_d}{(2\pi)^d}$$

où c_d est le volume de la boule unité en dimension d.

⋆

Soit Ω' un ouvert tel que $\bar{\Omega} \subset \Omega'$. On définit $H^1(\Omega)$ comme la restriction à Ω des éléments de $H^1_0(\Omega')$. H^1 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$< u, v >= \int_\Omega uv + \nabla u.\nabla v.$$

Exercice 3. *Problème de Neumann*

1. En utilisant le théorème de Lax Milgram montrer que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega) \int u.v + \nabla v.\nabla u = \int fv.$$

On dira alors que u est solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ sur } \Omega \\ \vec{n}.\nabla u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où on a noté $\vec{n}$ le vecteur normal au bord de Ω.

2. Montrer qu'il existe donc une suite croissante $\lambda_n^N \to \infty$ et une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, notée $(e_n^N)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta e_n^N = \lambda_n^N e_n^N \text{ sur } \Omega \\ \vec{n}.\nabla e_n^N = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

3. Montrer que

$$\lambda_n^N = \min_{\substack{V\subset H^1,\\ \dim(V)\geq n}} \max_{\substack{u\in V,\\ \|u\|_{L^2}=1}} \|\nabla u\|^2.$$

⋆

Exercice 4. *Estimation de Weyl 2*

On note λ_n^D les valeurs propres associées au problème de Dirichlet, et λ_n^N celles associées au problème de Neumann. On note $N_\Omega^N(\lambda) = \#\{\lambda_n^N(\Omega) \leq \lambda\}$ et $N_\Omega^D(\lambda) = \#\{\lambda_n^D(\Omega) \leq \lambda\}$.

1. Montrer que $N_\Omega^D(\lambda) \leq N_\Omega^N(\lambda)$.

2. En suivant la même démarche que dans l'exercice 2, montrer que

$$\limsup_{\lambda\longrightarrow\infty} \frac{N_\Omega(\lambda)}{\lambda^{\frac{d}{2}}} \leq |\Omega| \frac{c_d}{(2\pi)^d}$$

3. En déduire que

$$\lim_{\lambda\longrightarrow\infty} \frac{N_\Omega^D(\lambda)}{\lambda^{\frac{d}{2}}} = |\Omega| \frac{c_d}{(2\pi)^d}.$$

⋆