Analyse Complexe Corrigé du TD 6 (20/03 - 23/03)

Exercice 1

1. Il suffit de suivre la preuve du cours, en remarquant que si $|f+g| < |f|+|g|$, alors $tf+(t-1)g$ ne peut pas s'annuler pour $t \in [0,1]$.
2. On constate que sur le cercle de rayon 2, $|z^{20}| > |f|/2$, donc f a 20 zéros dans le disque de rayon 2. Par ailleurs, sur le cercle unité, $14|z|^3 > |f|/2$ donc f a 3 zéros dans le disque unité. Il y a ainsi 17 zéros dans la couronne.
3. On montre facilement que pour $|\mathrm{Im} z| > 10$, $|z \sin z| > 1$. Il suffit donc de se restreindre à une bande horizontale. Ensuite, on peut utiliser le TVI sur $\mathbb{R}$ pour trouver les zéros réels de $z \sin z - 1$. On peut constater que chaque zéro de $z\sin z - 1$ peut être associé à un zéro de $z \sin z$ (compté avec multiplicité). Si on arrive à montrer que dans des rectangles délimités par $\pm 10i \pm R$, pour une suite de valeur de R qui tend vers l'infini, $z\sin z$ et $z \sin z - 1$ ont autant de zéros, alors on aura gagné.
   Utilisons le théorème de Rouché. La différence entre les deux fonction est 1. Il faut donc montrer que sur le bord du rectangle, $|z \sin z| > 1$. Sur les bords horizontaux, c'est déjà fait. Il reste les bords verticaux. On choisit donc $R = (k+1/2)\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Alors $|z \sin z| = |z| \cosh \mathrm{Im} z > k\pi > 1$.

Exercice 2 Les valeurs propres sont les racines du polynôme charactéristique, et celui-ci dépend analytiquement de la matrice, donc il suffit de montrer que l'application racine σ est continue sur les polynômes unitaires. On se donne P un polynôme unitaire de degré n, et on note a_i l'ensemble de ses racines distinctes, et k_i leur multiplicités. On se donne $\epsilon > 0$ tel que la plus petite distance $|a_i - a_j|$, $i \neq j$ soit au moins 3ϵ. On considère alors les boules B_i de rayon ϵ centrées en les a_i. Si Q est un autre polynôme unitaire suffisemment proche de P, alors $|Q-P| < |P|$ sur la réunion des bords des B_i. En particulier, on obtient que $d(\sigma(Q), \sigma(P)) \leqslant \epsilon$.

Exercice 3 Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$, qui converge uniformément vers f sur U. On suppose que f n'est pas constante.

On se donne un compact K de U, et $a \in \mathbb{C}$. Quitte à augmenter K, on peut supposer que f ne prend pas la valeur a sur le bord de K. Dans ce cas, pour n assez grand, $|f_n - f| < |f|$ sur le bord le K, et f prend autant de fois la valeur a que f_n dans K.

1. D'après le raisonnement précédent, si les f_n sont injectives, alors f est injective sur les compacts. Donc injective.
2. Encore une fois, le raisonnement précédent montre que f ne prend pas la valeur 0 sur les compacts. Elle ne peut donc pas s'annuler.

Exercice 4 On utilise l'exercice 4 de la feuille précédente. On obtient directement

$$\sum_n \frac{1}{z^3 - n^3} = -\sum_{w^3 = z^3} \frac{\pi \cot \pi w}{-3w^2} = \frac{\pi}{3z^2}\left\{\cot \pi z + j \cot \pi j z + j^2 \cot \pi j^2 z\right\}. \tag{1}$$

Exercice 5 On pose $\ell = \lceil n/2 - 1 \rceil$. Alors l'intégrale de la fonction proposée, le long du contour annoncé, doit valoir (par le th. des résidus),

$$2i\pi \sum_{k=1}^{\ell} \frac{e^{2i\pi k^2/n}}{2i\pi} = \sum_{k=1}^{\ell} e^{2i\pi k^2/n}. \tag{2}$$

On veut trouver la limite de l'intégrale quand $R \to +\infty$. On considère d'abord les bouts horizontaux, et plus précisément, $iR + [0, n/2]$. Dans ce cas, le module de la fonction au numérateur est $\mathcal{O}(\exp -4\pi R t/n)$. Au dénominateur, c'est $1 + \mathcal{O}(\exp -2\pi R)$. Résultat, la contribution de ce côté est négligeable.

Ensuite, on s'intéresse au côté $-iR + [0, n/2]$. Pour celui-ci, le numérateur donne $\mathcal{O}(\exp 4\pi R t/n)$ et le dénominateur est $\sim \exp 2\pi R$ en module. Comme $t < n/2$, ce côté contribue aussi de façon négligeable !

Le côté de gauche donne

$$\int_{[-R,R]\backslash[-\epsilon,\epsilon]} \frac{-ie^{-2i\pi t^2/n} dt}{e^{-2\pi t} - 1} = i \int_\epsilon^R e^{-2i\pi t^2/n} \left\{ \frac{1}{1 - e^{-2\pi t}} + \frac{1}{1 - e^{2\pi t}} \right\} dt = i \int_\epsilon^R e^{-2i\pi t^2/n} dt. \tag{3}$$

Le côté de droite

$$\begin{aligned} e^{i\pi n/2} & \int_{[-R,R]\backslash[-\epsilon,\epsilon]} \frac{ie^{-2\pi t - 2i\pi t^2/n} dt}{(-1)^n e^{-2\pi t} - 1} \\ &= i^{n+1} \int_\epsilon^R e^{-2i\pi t^2/n} \left\{ \frac{e^{-2\pi t}}{(-1)^n e^{-2\pi t} - 1} + \frac{e^{2\pi t}}{(-1)^n e^{2\pi t} - 1} \right\} dt \\ &= i^{n+1} (-1)^n \int_\epsilon^R e^{-2i\pi t^2/n} dt. \end{aligned} \tag{4}$$

Tournons-nous vers les contributions des arcs de cercles. Celui autour de 0 va donner $-1/2 + o(1)$ quand $\epsilon \to 0$. Pour celui autour de $n/2$, cela dépend de la parité de n. Si n est pair, cela donne $i^n/2 + o(1)$. Quand n est impair, la limite est 0. Autrement dit c'est $(1 + (-1)^n)i^n/4$.

Si on rassemble toutes les estimées, en notant $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi k^2/n}$, on trouve que

$$\frac{1}{2}S_n = i(1 + i^n(-1)^n) \int_0^{+\infty} e^{-2i\pi t^2/n} dt = i(1 + i^n(-1)^n)\frac{1-i}{4}\sqrt{n}. \tag{5}$$

Et

$$S_n = \frac{1+i}{2}(1 + i^n(-1)^n)\sqrt{n}. \tag{6}$$

Exercice 6 *Bieberbach*

1. Ceci est le Théorème de l'Aire de Gronwall (le même que celui de l'inégalité). Il y a plusieurs façon de traiter cette question. La plus simple en terme de calculs (et de longueurs...) est la suivante :
   On considère la 1-forme $\alpha = xdy - ydx$. Pour $\epsilon > 0$, on appelle $A_\epsilon = \mathbb{C}\backslash g(\mathbb{C}\backslash(1+\epsilon)\mathbb{D})$.

   $$2Aire(A_\epsilon) = \int_{A_\epsilon} d\alpha = \int_{\partial A_\epsilon} \alpha = \int_{g((1+\epsilon)\mathbb{S})} \alpha = \int_{\mathbb{S}} g^*\alpha. \tag{7}$$

   La dernière formule est vraie car g est injective, et préserve l'orientation.
   On peut calculer $g^*\alpha$ le long du cercle de rayon $r = 1 + \epsilon$. C'est

   $$\alpha_{g(re^{i\theta})}(rg'(re^{i\theta})e^{i\theta}) = \operatorname{Im}\left\{g(re^{i\theta})r\overline{g'(re^{i\theta})}e^{-i\theta}\right\} \tag{8}$$

   Si on intègre cette expression pour $\theta \in [0, 2\pi]$, on obtient des termes 2π et $-2\pi n|b_n|^2$, et

   $$Aire(A_\epsilon) = \pi(1 - \sum n|b_n|^2). \tag{9}$$

   Or $Aire(A_\epsilon) \geqslant 0$!
2. On constate que $g(z^2) = z^2 h(z^2)$ où h ne s'annule pas (par injectivité de g). On peut donc prendre la racine carré w de h sur $\mathbb{D}$. On pose alors $f(z) = zw^{-1}(1/z^2)$. Comme g est injective, $f(z) = f(z')$ si et seulement $z = \pm z'$. Mais f est impaire, donc f est injective.
   De plus, on a un DL à l'infini

   $$f(z) = z\left\{1 + a_2\frac{1}{z^2} + \ldots\right\}^{-1/2} = z(1 - \frac{a_2}{2z^2} + \ldots) = z - \frac{a_2}{2z} + \ldots. \tag{10}$$

   D'après la question précédente, $|a_2|^2/4 \leqslant 1$.
3. Si $u \notin g(\mathbb{D})$, la fonction $h := ug/(u-g)$ profite des mêmes propriétés que g. En particulier, $|h''(0)| \leqslant 4$. Autrement dit, avec un développement de Taylor, on trouve

   $$\left|a_2 - \frac{1}{u}\right| \leqslant 2 \tag{11}$$

   et $|u| \geqslant 1/4$.
4. on cherche trouver le cas d'égalité dans le raisonnement précédent. Il semble atteint quand $|a_2| = 2$. Dans ce cas, d'après les calculs précédents on trouve que pour un certain v de module 1, $f(z) = z + v/z$. Autrement dit

   $$g(z^2) = \frac{z^2}{(1+z^2v)^2}, \tag{12}$$

   et $g(z) = z/(1+zv)^2$. On trouve bien que $g(1/v) = 1/4v$ est de module 1/4. De telles fonctions sont dites fonctions de Koebe. Le résultat de l'exercice s'appelle le lemme 1/4 de Koebe.

Exercice 7

1. Soit $(z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite injective de complexes telle que $|z_n| \to +\infty$. Soit également $(P_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de polynômes à coefficients complexes.
   Commençons par observer que sur le disque en question

   $$\frac{1}{z - z_n} = -\frac{1}{z_n}\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k \tag{13}$$

On peut noter $P_n(z) = \sum_m a_m^n z^m$. Alors, en dérivant la formule précédente, on obtient que

$$P_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right) = \sum_m a_m^n \frac{(-1)^m}{m-1!}\frac{1}{z_n}\sum_{k\geqslant 0} k\dots(k-m+2)z^{k-m+1}z_n^{-k}. \tag{14}$$

Autrement dit

$$P_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right) = \sum_k z^k \sum_m a_m^n \frac{(-1)^m}{m-1!} z_n^{-k-m+1}\frac{k+m-1!}{k!}, \tag{15}$$

Et

$$P_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right) = \sum_k z^k \sum_m a_m^n (-1)^m \binom{k+m-1}{k} z_n^{-k-m+1}. \tag{16}$$

Le coefficient $\binom{k+m-1}{k} z_n^{-k-m+1}$ tend vers 0 quand k augmente à m fixé. Cela montre qu'en tronquant la série de P_n autour de 0 à des puissances k_n fixées très grandes, on obtient des polynômes $Q_n(z)$ de degré k_n, tels que $P_n - Q_n$ est sommable sur les compacts de $\mathbb{C}\backslash\{z_n,\ n \geqslant 1\}$.

2. Il s'agit de construire une fonction avec des valeurs et des valeurs de dérivées prescriptes à un ensemble discret de points. On commence par se donner f une fonction entière dont les zéros sont exactement les z_n, d'ordres d_n, en utilisant un produit de Weierstrass. Ensuite, on construit des polynômes P_n tels que $g_n := P_n(1/(z-z_n))f(z)$ satisfait les conditions $g_n^{(k)}(z_n) = a_{n,k}$ pour $k = 0, \dots, d_n$. Ensuite, on considère les polynômes Q_n obtenus comme dans la question précédente, et on pose $g(z) = \sum P_n(1/(z-z_n)) - Q_n(z)$. Enfin, la fonction recherchée est $h(z) = f(z)g(z)$.
3. Soient $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ n'ayant pas de zéro commun. On veut trouver h_2 telle que $(e^{h_2} - f)/g$ soit holomorphe. Étant donné que les zéros de f et de g sont deux à deux distincts, il suffit de vérifier que $e^{h_2} - f$ s'annule suffisemment aux zéros de g. Pour cela, il faut construire, h_2 de sorte que le développement de Taylor de e^{h_2} coincide avec celui de f en chaque zéro de g, jusqu'à l'ordre du zéros. Étant donné que l'exponentielle est localement injective, le résultat de la question précédente nous indique que ceci est possible.
4. Soient $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Soit (z_n) l'ensemble des zéros communs à toute la famille, et (d_n) leurs ordres. On peut construire une fonction h qui s'annule exactement aux ordres d_n, aux points z_n. Alors on peut appliquer la question précédente à la famille (f_n/h)
5. Il suffit de prendre une famille de fonctions (f_n) de sorte que f_n s'annule sur les entiers $\{k \geqslant n\}$.