Td n° 6 d'EDP

Propoagation des singularités

Séance du 14 novembre 2014

Exercice 1. *Equation différentielle Hamiltonienne*

1. Soit $b(x,\xi) \in S^1$ un symbole homogène en ξ à valeur réelles. On considère la solution $t \mapsto \Phi^t(x,\xi)$ du système

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial b}{\partial \xi}(x(t),\xi(t)), \quad \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial b}{\partial x}(x(t),\xi(t)),$$

$$x(0) = x, \quad \xi(0) = \xi.$$

Montrer que le flot $\Phi^t : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^{2n}$ est défini pour tout t.

2. Montrer qu'il existe t_0, dépendant de b, tel que pour tout $p_0 \in S^0$, $p_0(\Phi^t(x,\xi))$ définisse un symbole dans S^0, uniformément en $t \in [0,t_0]$.

Indication : On pourra choisir t_0 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,t_0]$

$$|\pi_\xi \Phi^t(x,\xi) - \xi| \leq \frac{1}{2}|\xi|.$$

3. En itérant la résolution précedente, montrer que pour tout T, $p_0(\Phi^t(x,\xi))$ définit un symbole dans S^0, uniformément en $t \in [0,T]$.

⋆

Exercice 2. *Théorème d'Egorov*

On considère un symbole $a(x,\xi) = a^1 + a^0$, avec $a^1 \in S^1$ à valeurs imaginaires pures et homogène en ξ. On note H le champ de vecteur

$$H = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial a^1}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial a^1}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right).$$

On note $S(t,s)$ l'opérateur qui à $u_0 \in L^2$ associe la solution $u(t) = S(t,s)u_0$ de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Op(a)u = 0, \quad u(s) = u_0.$$

Soit $P_0 = Op(p_0) \in Op(S^0)$.

1. On pose $P(t) = S(t,0)P_0S(0,t)$. Montrer que P vérifie

$$P'(t) + [Op(a), P(t)] = 0, \quad P(0) = P_0.$$

2. On définit $q^{(0)} \in S^0$ par

$$\left(\frac{d}{dt} + H\right) q^{(0)}(t,x,\xi) = 0, \quad q^{(0)}(0,x,\xi) = p_0(x,\xi),$$

Montrer que
$$\frac{\partial}{\partial t}Op(q^{(0)}) + [Op(a), Op(q^{(0)})] = Op(b^{(-1)}) \in Op(S^{-1}).$$

3. On définit maintenant $q^{(-1)}$ par
$$\left(\frac{d}{dt} + H\right) q^{(-1)}(t,x,\xi) = b^{(-1)}(t,x,\xi), \quad q^{(-1)}(0,x,\xi) = 0.$$
Montrer que $q^{(-1)} \in S^{-1}$.

Indication : On pourra utiliser le principe de Duhamel et s'inspirer de l'exercice 1.

4. En continuant le processus, montrer qu'il existe $q_t \in S^0$ tel que $q_t(x,\xi) - p_0(\Phi^{-t}(x,\xi)) \in S^{-1}$ et
$$\frac{\partial}{\partial t}Op(q_t) + [Op(a), Op(q_t)] = Op(S^{-\infty}), \quad q_0(x,\xi) = p_0(x,\xi).$$

5. Soit $f \in H^{-\infty}$. Montrer que $S(t,0)P_0 f - Op(q_t)S(t,0)f \in H^{\infty}$.

⋆

Exercice 3. *Propagation des singularités*

On considère un symbole a définit comme dans l'exercice 2, et on considère la solution de
$$\frac{\partial u}{\partial t} + Op(a)u = 0, \quad u(0,x) = u_0.$$

1. Soit $(x_0, \xi_0) \notin WF(u_0)$. Montrer qu'il existe $P_0 \in Op(S^0)$ de symbole principal p_0 tel que $p_0(x_0,\xi_0) = 1$ et p_0 homogène en ξ pour ξ assez grand tel que $Op(p_0)u_0 \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

2. En introduisant l'opérateur $Op(q_t)$ de l'exercice précédent, montrer que
$$(\partial_t + Op(a))Op(q_t)u \in C^0([0,T], H^{\infty}), \quad Op(q_t)u|_{t=0} \in C_0^{\infty}.$$
En déduire que $Op(q_t)u(t) \in C^{\infty}$.

3. En déduire que $\Phi^t(x_0, \xi_O) \notin WF(u(t))$. Comparer avec le résultat du TD2 sur la propagation des singularités pour l'équation des ondes.

Indication : On pourra admettre le résultat suivant
$$Op(a)u \in C^{\infty} \Rightarrow WF(u) \subset Car(Op(a)) = \{(x,\xi), a_0(x,\xi) = 0\},$$
où a_0 est le symbole principal de $Op(a)$.