École Normale Supérieure
14 Novembre 2017

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$7 Corrigé

Exercice 1 : petites questions

1. Si X est connexe par arcs, il est également connexe, il suffit donc de montrer le sens réciproque. Supposons que X soit connexe, localement connexe par arcs et prenons $x \in X$ un point. Alors la composante connexe par arcs de X est ouverte puisque X est localement connexe par arcs : si y est reliable à x, il existe un voisinage de y où tout point est reliable à y, donc à x par transitivité. On a montré que les composantes connexes par arcs sont ouvertes. Comme elles partitionnent l'espace, elles sont également fermées. Par connexité de X, il n'y en a qu'une et X est connexe par arcs.

2. a) Supposons par l'absurde que ϕ soit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$. Alors il induit un homéomorphisme de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^2 - \{\phi(0)\}$, ce qui est absurde puisque l'un est connexe et pas l'autre.
b) [Plus difficile] Supposons de même qu'il existe une telle bijection. Alors elle induit en se restreignant à $[-n;n]$ un homéomorphisme sur son image K_n puisque celui-ci est compact. (une bijection continue entre compacts est un homéomorphisme.) Montrons que l'image est d'intérieur vide.

Supposons par l'absurde qu'il existe un point x dans l'intérieur de K_n. On a alors un homéomorphisme entre $[-n;n]-\{\phi^{-1}(y)\}$ et $K_n-\{y\}$. De plus, on peut supposer que $y \neq \phi(\pm n)$ quitte à changer le point y. On a alors un problème car on a à nouveau un homéomorphisme entre un espace connexe et un espace non connexe. En effet, soit $f : K_n - \{y\} \to \{0,1\}$ une fonction continue. Elle induit donc une fonction continue sur $\mathcal{B}(y,r) - \{y\}$, qui est connexe car connexe par arcs. Elle est donc constante sur cette boule épointée. On peut donc la prolonger de manière continue en y, et par connexité de K_n, il vient que K_n est bien connexe. Les K_n sont donc bien d'intérieur vide.

Le théorème de Baire est pris en défaut car $\mathbb{R}^2$ est l'union des K_n, qui sont des fermés d'intérieur vide. Il n'existe donc pas de telle bijection continue.

3. Soit U un ouvert fermé contenant x et C sa composante connexe. Alors $U \cap C$ est un ouvert fermé non vide de C, qui est donc égal à C par connexité de ce dernier. Ainsi, $C \subset U$. On a montré que les ouverts fermés sont réunion de composantes connexes. (la réciproque est fausse car les composantes connexes ne sont pas forcément ouvertes, tout comme l'union de composantes connexes n'est pas forcément fermée)

Il est clair que les composantes des points situés sur les segments sont égales aux segments qui les contiennent. Dès lors, la composante connexe de $(0,0)$ ne peut être égale qu'à lui-même, ou bien à $\{(0,0);(1,0)\}$, ce qui n'est pas le cas car celui-ci n'est pas connexe. De même pour

$(1,0)$. Soit maintenant U un ouvert fermé contenant $(0,0)$, il contient alors les $(0, \frac{1}{n})$ pour n assez grand car il est ouvert. Mais comme il est réunion de composantes connexes, il contient également les $(1, \frac{1}{n})$ qui sont dans les mêmes composantes connexes. Ainsi, comme U est fermé, il contient également $(1,0)$. Il n'existe donc pas d'ouvert fermé séparant les deux points du bas bien qu'ils ne soient pas dans la même composante connexe.

4. Soit $f ; A \cup B \to \{0;1\}$ continue. Alors f est constante sur A et B égale respectivement à a et b puisque ceux-ci sont connexes. Soit $x \in \overline{A} \cap B$. Alors $f(x) = b$. Comme f est continue en x, il existe un voisinage de x où elle ne prend que la valeur b. Mais ce voisinage intersecte A, où f prend la valeur a. Donc $a = b$ et $A \cup B$ est connexe.

5. Le résultat est faux si les parties ne sont pas fermées : il suffit de prendre $\bigcup_n [2n; 2n+1[$ et $\bigcap_n [2n+1; 2n+2[$. Sinon, soit $f : A \to \{0;1\}$ continue. Elle est constante sur $A \cap B$. On la suppose égale à 0 sur cette partie. On la prolonge donc par 0 sur $A \cup B$. Ce prolongement est bien continu car on a recollé deux applications continues. (c'est ici que l'on utilise que les deux parties sont fermées : l'image réciproque d'un fermé est l'union des images réciproques dans A et dans B, et puisque ceux-ci sont fermés, les fermés de A et B sont fermés dans $A \cup B$) Ainsi, f est constante sur $A \cup B$, donc sur A, ce qui montre sa connexité.

Exercice 2 : Théorème de Darboux

Soit $a < b$ dans I et $\Delta := \{(x,y) \in]a;b[^2$ tels que $x < y\}$ et $\varphi : (x,y) \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. L'image de φ est connexe car Δ l'est et φ est continue. De plus, son adhérence contient $f'(a)$ et $f'(b)$ (en faisant tendre x et y vers a et b). L'image contient donc l'intervalle $]f'(a); f'(b)[$. Tout élément de cet intervalle s'écrit comme une pente, donc comme la dérivée en un point par le théorème des accroissements finis, ce qui est précisément ce qu'on voulait.

Exercice 3 : ovales de Cassini

1. Il suffit de s'apercevoir que la fonction qui définit l'ovale est convexe sur les droites passant par 0. L'ensemble n'est pas toujours convexe : un défaut de convexité semble apparaître sur l'axe imaginaire pur, on peut le formaliser en prenant $a < R < a\sqrt{2}$, $R' = R + \varepsilon^3$, en prenant les points $u, v := i\sqrt{R'^2 - a^2} \pm \varepsilon$, ceux-ci sont bien dans G si ε est petit puisque

$$|u^2 - a^2|^2 = |v^2 - a^2|^2 = R^4 - 2\varepsilon^2(2a^2 - R^2) + O(\varepsilon^3).$$

Et le milieu du segment qu'il forment n'est jamais dans G.

2. Si $iy \in i\mathbb{R}$, alors $|(iy)^2 - a^2| = a^2 + y^2 \geq R^2$. L'ensemble est symétrique par rapport à 0, il n'est donc pas connexe. Il possède deux composantes connexes : celle dans le demi-plan droit et son symétrique. Ces parties sont bien connexes car elles sont l'image du disque de centre a^2 et de rayon R^2 par l'application carré, qui réalise un homéomorphisme sur chacun de ces demi-plans.

Exercice 4 : encore de la connexité

1. E est connexe puisque $E - \{0\}$ est clairement connexe par arcs, et $\{0\}$ aussi, donc connexes. Comme 0 est dans l'adhérence de $E - \{0\}$, d'après l'exercice 1, E est connexe. (On peut aussi

le montrer à la main en prenant une fonction continue à valeurs discrètes ou un ouvert fermé)

Il n'est pas connexe par arcs : soit $\gamma : [0;1] \to E$ continue. Alors $\gamma^{-1}(0)$ est un ouvert fermé : il est fermé car c'est l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue. Et il est également ouvert : soit t tel que $\gamma(t) = 0$. Comme γ est continue en t, il existe un intervalle ouvert voisinage de t telle que sur ce voisinage, on ait $\pi_y \circ \gamma < 1$. Mais alors, sur ce voisinage, $\pi_x \gamma$ ne prend comme valeurs que les $\frac{1}{n}$ et 0. Le théorème des valeurs intermédiaires implique alors qu'elle est constante égale à 0. Comme 0 est le seul point de E d'abscisse nulle ayant une ordonnée inférieure à 1, γ est en faite constante sur au voisinage de t. On a bien montré que $\gamma^{-1}(0)$ est ouvert. Par connexité de $[0;1]$, tout chemin passant par 0 est constant, E n'est donc pas connexe par arcs.

2. E est connexe par arcs puisqu'il est étoilé par rapport à 0. Mais il n'est pas localement connexe par arcs : soit par l'absurde V un voisinage connexe par arcs de $(x, rx) \neq 0$ ne contenant pas 0. Alors l'application continue $(x, y) \in E \mapsto \frac{y}{x}$ est continue sur V et à valeurs rationnelles, donc constante. Le voisinage V est donc inclus dans la droite de pente r, ce qui est absurde. E n'est donc pas localement connexe par arcs.

Exercice 5 ⫽⫽ : connexité de la topologie cofinie

1. Soit U un ouvert fermé non vide. U est ouvert, il est donc infini puisque c'est le complémentaire d'un ensemble fini. Comme U est également fermé, c'est le seul fermé infini, à savoir X. X est donc bien connexe. Comme la topologie trace sur les ouverts est également la topologie cofinie, les ouverts sont connexes, et X est donc en plus localement connexe.

2.

a) Soit $x \notin G$, il est dans l'un des F_n, mais pas dans ∂F_n, donc dans $\mathring{F}_n$. Réciproquement, un élément de $\mathring{F}_n$ n'est pas dans ∂F_n, ni aucun des autres bords puisque les fermés sont disjoints. On a donc montré que

$$G^c = \bigcup_n \mathring{F}_n,$$

qui est ouvert. G est donc bien fermé. Le théorème de Baire appliqué à $\bigcup_n \partial F_n$ nous garantissait que celui-ci est d'intérieur vide dans $[0;1]$, donc la densité du complémentaire. Le théorème de Baire mais cette fois appliqué à $[0;1] = \bigcup_n F_n$ nous assurait seulement que G^c était non vide.

b) G est un fermé d'un complet, donc complet, il est donc justiciable du théorème de Baire appliqué au recouvrement par les $F_n \cap G$: l'un d'eux est d'intérieur non vide dans G, c'est exactement ce qu'on veut.

c) Supposons G non vide et prenons a, b, n fournis par la question précédente. Soit $m \neq n$. Alors $]a;b[\cap F_m$ est un ouvert fermé de $]a;b[$. En effet, c'est un fermé puisque F_m est fermé, mais c'est également un ouvert car si $x \in]a;b[\cap F_m$, alors $x \notin \partial F_m$, sinon on aurait $x \in]a;b[\cap G \subset F_n$ qui est disjoint de F_m. Donc

$$]a;b[\cap F_m =]a;b[\cap \mathring{F}_m,$$

qui est donc également ouvert. Ainsi, par connexité, soit $]a;b[\subset F_m$, soit l'intersection est vide. Comme $\emptyset \neq]a;b[\cap G \subset F_n$, c'est la seconde possibilité qui est réalisée. Finalement, on a $]a;b[\subset F_n$, ce qui est absurde car il y a des points du bord de F_n dans $]a;b[$. Donc G est vide.

Comme G est vide, tous les bords sont vides, ce qui force un des F_n à être égal à $[0;1]$ et les autres à être vides : (une partie fermée et sans bord est égale à son intérieure, elle est donc à la fois ouverte et fermée)
d) Soit $\gamma : [0;1] \to \mathbb{N}$ un chemin. Les $F_n := \gamma^{-1}(n)$ satisfont les hypothèses de la question précédente, ce qui montre qu'un tel chemin est constant. La topologie n'est donc pas connexe par arcs.

3. Soit x et y deux points de X et $\gamma : [0;1] \to X$ qui associe 0 à x, 1 à y et est injective sur le reste de l'intervalle. La préimage d'un fermé (*i.e.* d'un ensemble fini) est un ensemble fini par injectivité, donc fermé, ce qui montre la continuité de γ. X est donc bien connexe par arcs.

Exercice 6 : Tipi de Cantor

1. Il est facile de séparer deux points par une fonction continue, dès lors les composantes connexes sont des singletons.

2. • Le tipi moins son sommet est totalement discontinu : il est possible de séparer les points dans différents rayons par des ouverts fermés en traçant un rayon émanant d'un point qui n'est pas dans l'ensemble de Cantor. Comme $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont totalement discontinus, il en est de même du tipi sans son sommet.

• (à compléter) Il est plus difficile de montrer que le tipi plus son sommet est connexe. On note $\mathcal{B}$ le bord du Cantor, c'est à dire les éléments rationnels, et $\mathcal{G}$ les éléments irrationnels. On considère deux ouverts fermés disjoints U et V le recouvrant, et où U contient le sommet. On définit la fonction hauteur h par

$$h : c \in K \mapsto \sup\{y : \exists x \ (x,y) \in T_c \cap U\}.$$

h décrit grosso modo la frontière entre U et V. On note ensuite pour q un rationne strictement positif F_q l'adhérence de l'ensemble des points de hauteur q. Remarquons d'abord que chaque F_q ne rencontre pas $\mathcal{B}$: pour un point $b \in \mathcal{B}$, si $h(b)$ était rationnel, le point de $[s;b]$ d'ordonnée $h(b)$ serait dans U ou dans V, dans les deux cas il est impossible que l'on ait $h(b) = q$. De même, si $g \in \mathcal{G}$, on a $h(g)$ qui est rationnel. Ainsi, comme $\mathcal{B}$ est dens dans K, les F_q sont d'intérieur vide.
En notant H l'ensemble des points de hauteur nulle, on a finalement

$$\mathcal{G} = H \cup \bigcup_q F_q.$$

Le théorème de Baire permet de montrer que H est dense dans K. Donc l'ensemble des T_c pour c dans H est dense dans le tipi. Comme c'est également dans U, qui est fermé, il vient que $U = T$ et on a fini.
Montrer que T est connexe mais que $T - \{S\}$ est totalement discontinu.

Exercice 7 : espaces compacts et connexité

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts connexes non-vides. Soit $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

1. Puisque $K \subset U \cup V$, la famille $(K_n, (U \cup V)^c)$ est d'intersection vide, ce qui signifie qu'à partir d'un certain rang, la suite K_n est incluse dans $U \cup V$. Soit n ce rang. Comme K_n est connexe, on a $K_n \subset U$ ou $K_n \subset V$. D'où la même chose pour K.

2. Si on pouvait écrire K comme l'union de deux fermés disjoints, on pourrait les séparer par deux ouverts puisqu'un compact est normal. Cela entre en contradiction avec la question 1.

Exercice 8 : Compacts et connexité

1. Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de x. Si par l'absurde $A = A_1 \sqcup A_2$, alors soit $\varepsilon < \frac{d(A_1,A_2)}{3}$. Il existe un rang à partir duquel $d(x_n, A) < \varepsilon$ et $d(x_{n+1}, x_n) < \varepsilon$. Soit x_n à distance inférieure à ε de A_1. On a alors par récurrence que les termes de la suite restent à distance inférieure à ε de A_1 : si c'est le cas de x_m, x_{m+1} est à distance inférieure à ε de x_m, et est donc à distance supérieure strictement à ε de A_2, tout en étant proche à distance inférieure à ε de A. C'est donc qu'il est aussi à distance inférieure à ε de A_1. Cela force A_2 à être vide, ce qui est absurde. L'ensemble des valeurs d'adhérence est donc connexe.

2. D'après 1, l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle. Si λ est une valeur d'adhérence, on a $f(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)} \to f(\lambda) - \lambda = 0$. Donc les valeurs d'adhérence sont des points fixes. Si l'intervalle n'est pas réduit à un point, la suite prend une valeur dans cet intervalle et alors elle y stationne, ce qui est absurde. Donc la suite n'a qu'une seule valeur d'adhérence et elle converge.

3. Avec les mains ... On recouvre A par des boules centrées sur A et de rayon fixé. Le graphe qui relie les centres des boules est connexe, sinon on pourrait séparer les boules en deux paquets, ce qui contredirait la connexité de A. On peut donc démarrer une suite qui énumère les centres des boules. Puis on recommence en diminuant la taille des boules. Il est alors relativement facile de montrer que les valeurs d'adhérences de la suite ainsi construire est exactement A.