École Normale Supérieure
14 Novembre 2017

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$7

Exercice 1 : petites questions

1. Montrer qu'un espace localement connexe par arcs est connexe par arcs si et seulement s'il est connexe.

2. a) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
b) [Plus difficile] Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

3. Soit X un espace topologique, x et y deux points de X. Soit U un ouvert-fermé contenant x mais pas y. Montrer que y n'est pas dans la composante connexe de x. A-t-on une réciproque ? (considérer l'ensemble $\{(0,0),(1,0)\} \cup \{(x, \frac{1}{n})\}_{x\in[0;1], n\in\mathbb{N}^*}$.)

4. Soient A et B des parties connexes d'un espace topologique X telles que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.

5. Soient A et B des fermés d'un espace X tels que $A \cap B$ et $A \cup B$ soient connexes. Montrer que A et B le sont également mais que le résultat peut tomber en défaut si A et B ne sont pas supposés fermés.

Exercice 2 : Théorème de Darboux

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable définie sur un intervalle. Montrer que sa dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires : si J intervalle, $f'(J)$ intervalle.

Exercice 3 : ovales de Cassini

Soient a et R deux réels positifs. On considère l'ensemble suivant :

$$G := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z^2 - a^2| < R^2\}.$$

Sa frontière s'appelle un ovale de Cassini. (lemniscate de Bernoulli si $a = R$.

1. On suppose que $a < R$. Montrer que G est étoilé par rapport à 0 et donc connexe. Est-il toujours convexe ?

2. Si $a \geq R$, montrer que $G \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. L'ensemble G est-il connexe, combien a-t-il de composantes connexes s'il ne l'est pas ?

Exercice 4 : encore de la connexité

1. On note $E = \{(x,1) \text{ tq } x \in [0;1]\} \cup \{(0,0)\} \cup \{(1/n, y) \text{ tq } n \in \mathbb{N}^*, y \in [0;1]\}$.
Montrer que E est connexe mais pas connexe par arcs.

2. On note $E = \{(x, rx) \text{ tq } r \in \mathbb{Q} \cap [0;1]\}$.
Montrer que E est connexe par arcs mais pas localement connexe par arcs.

Exercice 5 ✐✐ : connexité de la topologie cofinie

Soit X un ensemble infini. On appelle *topologie cofinie* sur X la topologie dont les ouverts sont l'ensemble vide et les ensembles de complémentaire fini.

1. Montrer que X est connexe et localement connexe.

2. Dans cette question, on va montrer que, si $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition disjointe de $[0;1]$ en fermés, alors tous les F_n sont vides, sauf l'un qui vaut $[0;1]$.
Posons $G = \bigcup\limits_n \partial F_n$, où ∂F_n désigne le bord de F_n dans $[0;1]$.
a) Montrer que G est fermé dans $[0;1]$.
b) Montrer que, si G est non-vide, il existe $a < b \in \mathbb{R}$ tels que $]a;b[\cap G$ est non-vide et inclus dans l'un des F_n.
c) Montrer qu'il est impossible que G soit non-vide. Conclure.
d) Montrer que, si X est dénombrable, X n'est pas connexe par arcs.

3. On suppose ici que X n'est pas dénombrable. On suppose de plus qu'il existe une injection de $\mathbb{R}$ dans X (c'est le cas si on suppose l'hypothèse du continu).
Montrer que X est connexe par arcs.

Exercice 6 ✐✐ : Tipi de Cantor

On considère K l'ensemble de Cantor triadique, vivant dans $[0;1]$.

1. Montrer que K est totalement discontinu.

2. On note K_1 l'ensemble des points de K appartenant à la frontière de l'un des F_n ; on note $K_2 = K - K_1$. Soit S le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(0,1)$. Si P est dans K_1 (resp. K_2), on pose T_P l'ensemble des points du segment $[PS]$ d'ordonnée dans $\mathbb{Q}$ (resp. dans $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$). On pose T l'union des T_P, pour P dans K. C'est le *tipi de Cantor* (ou *éventail de Knaster-Kuratowski*).
Montrer que T est connexe mais que $T - \{S\}$ est totalement discontinu.

Exercice 7 ✐✐ : espaces compacts et connexité

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts connexes non-vides. Soit $K = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

1. Soient U, V des ouverts disjoints de K_0 qui recouvrent K. Montrer que $K \subset U$ ou $K \subset V$.

2. En déduire que K est connexe.

Exercice 8 ✐✐ : Compacts et connexité

1. Soit X un espace métrique compact et (x_n) une suite telle que $d(x_{n+1}, x_n)$ tende vers 0. Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est connexe.

2. Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ continue et (x_n) la suite définie par récurrence à partir de son premier terme et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que si $x_{n+1} - x_n \to 0$, elle converge.

3. Réciproque de la question 1 : si l'on se donne A un fermé de X l'espace métrique compact de la question 1, montrer que l'on peut trouver une suite (x_n) telle que $d(x_{n+1}, x_n)$ tende vers 0 et A soit exactement l'ensemble des valeurs d'adhérence de X. (utiliser la pré-compacité de A et le recouvrir par des boules de rayon de plus en plus petit.)