Td n° 7 d'Analyse fonctionnelle

Transformation de Fourier

Séance du 29 mars 2013

Exercice 1. *Quelques questions sur la transformée de Fourier*

1. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie non nulle. Montrer que $\widehat{\mathbb{1}_A}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$, mais pas à $L^1(\mathbb{R}^d)$.

2. Existe-t-il deux fonctions $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $f * g = 0$? Que se passe-t-il si on demande de plus que $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$?

3. Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $a_1, ...a_k$ des réels non tous nuls tel que $\sum_{i=1}^k a_i \partial^i u = 0$. Montrer que $u = 0$.

⋆

Exercice 2. *Transformée de Fourier de* $\mathrm{vp}\, x$

On rappelle que la *valeur principale* de $1/x$ est définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), < \mathrm{vp}\, x, \phi >= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right).$$

1. Montrer que $x \, \mathrm{vp}\, x = \mathbb{1}$.

2. Montrer que $\mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x)$ est impaire au sens des distributions, c'est-à-dire que, en notant $\varphi^v(x) = \varphi(-x)$, on a $< \mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x), \varphi^v >= - < \mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x), \varphi >$.

3. En déduire $\mathcal{F}(\mathrm{vp}\, x)$.

⋆

Exercice 3. *Formule sommatoire de Poisson*

On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que f' et f'' sont intégrables et qu'il existe une constante C telle que

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}.$$

On fixe une période $a \in \mathbb{R}$ et on pose $S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + na)$.

1. Montrer que S est bien définie, continue et périodique et calculer ses coefficients de Fourier.

2. Montrer la *formule sommatoire de Poisson* :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\frac{2\pi m}{a}),$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f.

3. Application : Soit $\Theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Theta(\frac{1}{x})$.

4. Application (théorème d'échantillonage de Shannon) : Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq F$. Montrer que

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) sinc(\frac{\pi(t - nT)}{T}),$$

où $sinc(x) = \frac{sin x}{x}$ et $T = \frac{\pi}{F}$.

⋆

Exercice 4. *Théorème de Paley-Wiener*

1. Expliquer pour quoi la transformée de Fourier d'une distribution $T \in \mathcal{E}(\mathbb{R})'$ est analytique.

Cependant, la transformée de Fourier d'une fonction analytique n'est pas toujours une distribution à support compact (elle n'est même pas toujours définie !). Le but de cet exercice est de montrer une condition nécessaire et suffisante pour avoir cette propriété.

2. On suppose $F(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx$ avec $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On suppose f supportée dans $B(0, R)$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe C_N telle que

$$|F(\xi)| \leq C_N(1 + |\xi|^{-N})e^{R|\Im(\xi)|}. \tag{1}$$

3. Soit F une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété (1) pour tout N. On pose $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}F(\xi)d\xi$. Montrer que cela défini bien une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

4. En utilisant l'intégration sur un contour dans le plan complexe, montrer que pour tout $\eta \in \mathbb{R}$ on a

$$|f(x)| \leq Ce^{R|\eta|-x\eta}.$$

En déduire que f est à support compact. Conclure.

5. Montrer qu'une fonction F, analytique sur $\mathbb{C}$ est la transformée de Fourier d'une distribution T à support compact si et seulement si il existe R, N, C tels que

$$|F(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^N)e^{R|\Im(\xi)|}.$$

Indication : On pourra régulariser T et utiliser la question précédente.

⋆