Td n° 7 d'Analyse fonctionnelle

Espaces de Sobolev et compacité

Séance du 4 avril 2014

Exercice 1. *Quelques questions sur les espaces de Sobolev H^s*

1. Vérifier que $\delta_0 \in H^s$ pour $s < -d/2$. Montrer que pour $s > d/2$, H^s s'injecte continument dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$

2. Montrer que $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \cup_s H^s$.

3. Montrer que l'injection de H^{s_1} dans H^{s_2} pour $s_1 \geq s_2$ est continue.

4. On suppose maintenant que $s \in]d/2, d/2+1[$. Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1]$ et x, y, ξ :

$$|e^{ix\xi} - e^{iy\xi}| \leq 2|x-y|^\alpha |\xi|^\alpha.$$

En déduire que pour tout $\alpha \in]0, s - d/2[$, il existe $C(\alpha)$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(\alpha)\|u\|_{H^s}.$$

Conclure que $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$, ensemble des fonctions α-Holderiennes bornées.

⋆

Exercice 2. *Réciproque et application du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov*

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $p \in [1, \infty[$ et $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$. Si $f \in L^p(\Omega)$, on étend implicitement f à $\mathbb{R}^d$ en posant $f(x) = 0$ pour $x \notin \Omega$. On peut alors considérer pour $h \in \mathbb{R}^d$:

$$(\tau_h f)(x) = f(x+h).$$

On suppose que $\mathcal{F}$ est relativement compacte.

1. Montrer que pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ quand $|h| \to 0$.

2. Conclure : montrer que $\mathcal{F}$ est bornée et vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall f \in \mathcal{F},\ \forall h \in B(0,\delta), \quad \|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Application (du sens direct).

3. Soit $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, montrer que l'opérateur $T : f \in L^p(\mathbb{R}^d) \to f * g 1_\omega \in L^p(\omega)$ est compact.

⋆

Exercice 3. *Un problème elliptique non-linéaire*

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$, et $p > 1$. Étant donné $g \in H^1(\Omega)$, on cherche à résoudre, pour $u \in H^1(\Omega)$, l'équation

$$\begin{cases} \Delta u = |u|^{p-1} u & \Omega, \\ u = g & \partial\Omega. \end{cases} \tag{$*$}$$

On introduit
$$H^1_g(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) |\, u|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}\}.$$

1. Expliquer pourquoi $H^1_g(\Omega)$ est bien défini (non vide), et montrer que $H^1_g(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ si $p \leq \frac{d+2}{d-2}$.

2. Soit J la fonctionnelle
$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}.$$
Soit $u_n \in H^1_g(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ une suite de minimiseurs de J, i.e une suite vérifiant
$$J(u_n) \to \inf_{v \in H^1_g(\Omega)} J(v).$$
Montrer qu'il existe $u \in H^1_g(\Omega)$ réalisant le minumum et tel que quitte à extraire, $u_n - u \rightharpoonup 0$ dans $H^1_0(\Omega)$-faible et $L^{p+1}(\Omega)$-faible.

Montrer qu'un tel minimiseur est unique.

3. En déduire que u est une solution faible de $(*)$.

⋆

Exercice 4. *Problème elliptique avec contrainte intégrale*

Soit Ω un ouvert borné connexe et régulier de $\mathbb{R}^d$. Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière. On note $g = G'$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout x dans $\mathbb{R}$:
$$|g(x)| \leq C(|x| + 1)$$
On note pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$ les fonctionnelles définies par :
$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2,$$
$$J(u) = \int_\Omega G(u).$$
On introduit $\mathcal{A}$ le sous-ensemble de $H^1_0(\Omega)$:
$$\mathcal{A} = \{w \in H^1_0(\Omega) | J(w) = 0\}.$$

1. Supposons que $\mathcal{A}$ soit non vide. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ satisfaisant :
$$I(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} I(w).$$

2. Soit u un minimiseur du problème précédent. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$,
$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v dx = \lambda \int_\Omega g(u) v dx.$$
Indication : On pourra considérer une perturbation de la forme $u + tv + sw$ avec s et w bien choisis pour avoir $J(u + tv + sw) = 0$.

⋆