# Analyse fonctionnelle
# TD n° 7

## Révisions pour le partiel

Séance du 13 mars 2017

**Exercice 1.** *Échauffement*

Soient $X$, $Y$ deux espaces de Banach, et $T : X \to Y$ une application linéaire continue et surjective. Montrer qu'il existe $R : Y \to X$ continu tel que $TR = \mathrm{id}_Y$ si et seulement si $\ker T$ est complémenté dans $X$.

⋆

**Exercice 2.** *Opérateur de Volterra*

Notons $E = L^2([0,1])$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur $[0,1]$, et $V$ l'opérateur tel que pour tout $f \in E$,

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in [0,1].$$

1. Montrer que $V : E \to E$ est continu, compact, et montrer que son spectre est réduit à 0.

2. Déterminer l'opérateur $V^*$.

3. Calculer $\|VV^*\|$, et en déduire que $\|V\| = \frac{2}{\pi}$.

⋆

**Exercice 3.** *Espaces $L^p$, $p \in ]0,1[$*

Soit $0 < p < 1$. On définit $L^p([0,1]) = \{f \mid \int_0^1 |f|^p < \infty\}$, puis on pose

$$d(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx.$$

1. Montrer que $d$ définit une distance sur $L^p([0,1])$.

2. Soit $V$ un voisinage ouvert de 0, que l'on suppose convexe. On veut montrer que $V = L^p([0,1])$. Soit donc $f \in L^p([0,1])$, et un entier $n \geq 1$.

(a) Montrer qu'il existe des points $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ tels que :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}, \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f|^p = \frac{1}{n} \int |f|^p.$$

(b) On définit $g_i^n(x) := nf(x)\mathbb{1}_{x \in [x_i, x_{i+1}]}$. En utilisant $g_i^n$, montrer que $f \in V$.

3. En déduire que $L^p([0,1])^* = \{0\}$.

⋆

**Exercice 4.** *L'ensemble des opérateurs compacts d'un Hilbert n'est pas complémenté*

Soit $H$ un espace de Hilbert séparable, de dimension infinie, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\mathcal{L}(H)$ l'espace de Banach des opérateurs continus sur $H$, et $K(H)$ le sous-espace fermé des opérateurs compacts. Le but de l'exercice est de démontrer le théorème suivant :

**Théorème.** *Soit $\Phi : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$ un opérateur linéaire continu dont le noyau contient les opérateurs compacts. Alors il existe une projection $P \in \mathcal{L}(H)$, d'image de dimension infinie, telle que $\Phi(P) = 0$.*

1. Déduire du théorème que $K(H)$ n'est pas complémenté dans $\mathcal{L}(H)$.

2. Soit $I$ l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$, et $\{p_k\}_{k\geq 0}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Pour $i \in I$, qu'on écrit $i = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_n < \ldots\}$, on note $A_i := \{p_{i_1}, p_{i_1}p_{i_2}, p_{i_1}p_{i_2}p_{i_3}, \ldots\}$. Montrer que

$$\forall i, i' \in I,\ i \neq i', \quad A_i \cap A_{i'} \text{ est fini.}$$

3. Soit $\{e_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $H$. Pour $i \in I$, on note $H_{A_i}$ le sous-espace vectoriel fermé de $H$ engendré par les $e_a$, $a \in A_i$, et on introduit $P_{A_i}$ la projection orthogonale (continue) sur $H_{A_i}$. On définit enfin $T_i := \Phi(P_{A_i})$. Montrer que les $\{T_i\}_{i\in I}$ vérifient la propriété suivante :

$$\exists C > 0,\ \forall J \subseteq I \text{ fini}, \quad \|\textstyle\sum_{j\in J} T_j\| \leq C. \qquad (P)$$

4. Montrer que toute famille $\{S_\ell\}_{\ell\in L}$ d'opérateurs tous non nuls de $\mathcal{L}(H)$ vérifiant la propriété $(P)$ est au plus dénombrable.

*Indication :* On pourra montrer que pour $n$, $m \geq 0$, et $N \geq 1$ entiers, l'ensemble $L_{n,m,N} := \{\ell \in L,\ |\langle e_n, S_\ell(e_m)\rangle| \geq \frac{1}{N}\}$ est fini.

5. En déduire qu'il existe alors $i_0 \in I$ tel que $T_{i_0} = 0$, et conclure.

⋆

**Exercice 5.** *Théorème de Milman-Pettis*

On dit qu'un espace de Banach $E$ est uniformément convexe, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ et $\|\frac{x+y}{2}\| \geq 1 - \delta$, alors $\|x - y\| \leq \varepsilon$.

1. Montrer qu'un espace de Hilbert est uniformément convexe.

2. Montrer que l'espace $\ell^1(\mathbb{N})$ (muni de sa norme usuelle) n'est pas uniformément convexe.

L'objet de cet exercice est de montrer le théorème de *Milman-Pettis* : tout espace uniformément convexe est réflexif.

3. Montrer que si $B^{**}, S^{**}$ sont respectivement la boule unité et la sphère unité de $E^{**}$, et $\tilde{B} = J_E(B)$ et $\tilde{S} = J_E(S)$ les image de la boule unité et de la sphère unité de $E$ dans $E^{**}$, on a $\tilde{B} \subset B^{**}$ et $\tilde{S} \subset S^{**}$.

4. Montrer que $\tilde{S}$ est dense dans $B^{**}$ pour la topologie faible-$\star$ (de $E^{**}$ par rapport à $E^*$, *i.e.* dont les ouverts sont engendrés par les $U_{y^*,a} = \{x^{**} \mid x^{**}(y^*) > a\}$ ).

5. Montrer que si $\tilde{S} \neq S^{**}$ il existe $x_0^{**} \in S^{**}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $x_0^{**}$ est à distance $2\varepsilon > 0$ de $\tilde{S}$.

6. Montrer qu'il existe $y_0^* \in E^*$ de norme 1, tel que $|x_0^{**}(y_0^*) - 1| \leq \delta$ (où $\delta > 0$ est donné par l'uniforme convexité, relativement au $\varepsilon$ ci-dessus).

7. Soit $V = \{y^{**} \in E^{**} \mid |y^{**}(y_0^*) - 1| < \delta\}$. Montrer que si $J_E(y), J_E(z) \in V \cap \tilde{S}$, on a $\|\frac{y+z}{2}\| \geq 1 - \delta$. En déduire que $\|y - z\| \leq \varepsilon$, puis que $V \cap \tilde{S} \subset J_E(y) + \varepsilon B^{**}$

8. En déduire que $x_0^{**} \in J_E(y) + \varepsilon B^{**}$ et conclure.

⋆