Analyse fonctionnelle
TD n° 7

Révisions pour le partiel

Séance du 18 mars 2019

Exercice 1. *Échauffement : vrai ou faux*

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes et justifier.

1. Un sous-espace de dimension finie d'un Banach est toujours fermé.

2. Un sous-espace de codimension finie d'un Banach est toujours fermé.

3. Si F est un sous-espace vectoriel fermé non dense d'un espace vectoriel E, alors il existe une forme linéaire $f \in E^*$ telle que pour tout $x \in F$, $\langle f, x \rangle = 0$.

4. Un sous-espace vectoriel fermé pour la topologie faible est fermé pour la topologie forte.

5. Si ℓ est une forme linéaire d'un espace vectoriel topologique, l'ensemble $\{x \mid \ell(x) > 0\}$ est un ouvert pour la topologie forte si et seulement si ℓ est continue.

6. Si $(x_n)_n$ est une suite dans un Banach E et si $\|x_n\| \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$, alors il existe $\ell \in E^*$ telle que $(\ell(x_n))_n$ ne soit pas bornée.

7. Une suite d'un Banach qui converge faiblement converge fortement.

8. Si $(x_n)_n$ est une suite bornée d'un espace de Banach réflexif alors il existe une suite extraite qui converge faiblement.

9. Une limite inductive d'espaces de Fréchet est métrisable.

10. Tout espace vectoriel topologique localement convexe est métrisable.

⋆

Exercice 2. *Formule des sauts sur un intervalle*

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f telle qu'il existe $a_1 < \cdots < a_N$ dans I tels que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$. On suppose que f et f' admettent des limites à droite et à gauche en a_i pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, et on note les limites de f respectivement $f(a_i + 0)$ et $f(a_i - 0)$. Comme $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$, elle définit une distribution T_f. Montrer que, au sens des distributions,

$$T_f' = T_{f'_{\text{reg}}} + \sum_{i=1}^{N} (f(a_i + 0) - f(a_i - 0))\delta_{a_i},$$

où $f'_{\text{reg}} \in L^1_{\text{loc}}(I)$ est la fonction égale à f' sur $I \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$.

⋆

Exercice 3. *Fonctions de L^1 génériques*

On munit $[0, 1]$ de la mesure de Lebesgue λ, et l'on considère l'espace de Banach $X := L^1([0, 1])$.

1. Montrer que pour tout $p > 1$, $L^p([0, 1])$ est un sous-espace vectoriel de X.

2. Pour $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose

$$E_N := \left\{ f \in L^1 \,/\, \forall I \subset [0, 1] \text{ borélien}, \int_I |f| \leq N \lambda(I)^{\frac{1}{N}} \right\}.$$

Montrer que E_N est fermé dans X, et que $\bigcup_{p>1} L^p([0,1]) \subset \bigcup_{N\geq 1} E_N$.

3. Pour $N \geq 1$ donné, on considère $f \in E_N$, et $\varepsilon > 0$. On pose

$$g_N : x \in [0,1] \mapsto \frac{1}{x^{1-\frac{1}{2N}}} \cdot$$

Montrer que $f + \varepsilon g_N \in X$, mais n'appartient pas à E_N. En déduire que l'ensemble des fonctions de L^1 qui n'appartiennent à aucun L^p (quelque soit $p > 1$) est dense dans X.

⋆

Exercice 4. *Distributions homogènes*

– Les questions 2 à 6 sont indépendantes. –

Dans tout cet exercice on considère un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ stable par homothétie, c'est-à-dire que $M_\lambda(\Omega) \subset \Omega$ où pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$M_\lambda(x) := \lambda x\,.$$

On dit qu'une fonction f sur $\mathbb{R}^d$ est homogène de degré β sur Ω si

$$\forall x \in \Omega\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad f(\lambda x) = \lambda^\beta f(x)\,.$$

On rappelle que si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution et $\phi \in C^\infty(\Omega', \Omega)$ un difféomorphisme, on a $T \circ \phi \in \mathcal{D}'(\Omega')$ avec

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \quad \langle T \circ \phi, \varphi \rangle = \big\langle T, |\det D\phi^{-1}|\ \varphi \circ \phi^{-1} \big\rangle\,.$$

On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est homogène de degré β si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad T \circ M_\lambda = \lambda^\beta T \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Montrer que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,, \quad \langle T \circ M_\lambda, \varphi \rangle = \lambda^{-d} \big\langle T, \varphi\big(\frac{\cdot}{\lambda}\big) \big\rangle\,.$$

2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$, homogène de degré β sur Ω.
   (a) Montrer que
   $$x \cdot \nabla f(x) = \beta f(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \Omega\,.$$
   (b) En déduire que
   $$\sum_{j=1}^d \partial_j\big(x^j f(x)\big) = (d+\beta) f(x)\,.$$
   (c) Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ homogène de degré β. Montrer que
   $$\sum_{j=1}^d \partial_j\big(x^j T\big) = (d+\beta) T \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$
   (On pourra trouver utile de calculer $\partial_\lambda \varphi(x/\lambda)_{|\lambda=1}$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$).
3. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, continue sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, homogène de degré β.

(a) Montrer que

$$f(x) = |x|^\beta f\Big(\frac{x}{|x|}\Big)$$

et que si

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(y)|\, d\sigma(y) = 0$$

où $d\sigma$ désigne l'élement de surface sur la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1}$, alors $f = 0$ sur $\mathbb{R}^d$.

(b) En déduire qu'une fonction continue, non identiquement nulle, homogène de degré β est localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si $\beta > -d$.

4. Montrer que δ_0 est homogène sur $\mathbb{R}^d$ de degré $-d$.
5. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ homogène de degré β. Montrer que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la distribution $\partial^\alpha T$ est homogène de degré $\beta - |\alpha|$.
6. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ homogène de degré $\beta > -d$. On veut montrer qu'il existe une distribution $\dot{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ homogène de degré β qui prolonge T à $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})\,, \quad \langle \dot{T}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle\,.$$

On définit, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, la fonction $R_\beta \phi$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d\,, \quad R_\beta \phi(x) := \int_0^\infty \phi(rx) r^{\beta+d-1}\, dr\,.$$

Soit $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$ et soit la fonction χ définie par

$$\chi(x) = c\,\zeta(|x|) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c} = \int \zeta(t) \frac{dt}{t}\cdot$$

(a) Vérifier que l'application

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,, \quad \langle \dot{T}, \phi \rangle = \langle T, \chi R_\beta \phi \rangle$$

définit une distribution $\dot{T}$ sur $\mathbb{R}^d$.

(b) Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$,

$$\langle \dot{T}, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle\,.$$

(c) Montrer que $\dot{T}$ homogène de degré β et conclure.

⋆

Exercice 5. *Théorème de Krein-Šmulian*

Soit X un espace de Banach. On rappelle que pour tout $x \in X$, on dispose de l'évaluation $\varphi_x : X^* \to \mathbb{R}$, $\ell \mapsto \ell(x)$. On définit ainsi une application $J : X \to X^{**}, x \mapsto \varphi_x$. Semblablement, si $\ell \in X^*$, on définit l'application $\tilde{\varphi}_\ell$, et l'application $\tilde{J} : X^* \to X^{***}$. Enfin, pour tout espace E, on note B_E la boule unité fermée de E.

Partie I : Sur la continuité faible-$*$ séquentielle

Dans cette partie, on suppose que X est séparable, et l'on note $\{x_n\}$ une suite dense dans X. On fixe $\psi \in X^{**} \setminus J(X)$.

1. Montrer qu'il existe $a \in X^{***}$ de norme ≤ 1, avec $a(\psi) =: c > 0$, et tel que $a \equiv 0$ sur $J(X)$.

2. En considérant les voisinages définis par

$$U_n := \{b \in B_{X^{***}} \mid |(a-b)(\varphi_{x_n})| < 1\}, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$V := \left\{b \in B_{X^{***}} \;\middle|\; |(a-b)(\psi)| < \tfrac{c}{2}\right\},$$

construire une suite $\{\ell_n\}$ d'éléments de X^* telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \|\ell_n\|_{X^*} \leq 1, \\ |\ell_n(x_j)| < 1, \quad \forall 0 \leq j \leq n, \\ |\psi(\ell_n)| \geq \frac{c}{2}. \end{cases}$$

3. En déduire que $\ell_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ (au sens de la topologie faible-$*$ $\sigma(X^*, X)$.

4. Soit $\psi \in X^{**}$. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $\psi = \varphi_x = J(x)$ si et seulement si, pour toute suite $\{\ell_n\}$ d'éléments de X^* vérifiant que $\ell_n \overset{*}{\rightharpoonup} \ell$, on a $\psi(\ell_n) \to \psi(\ell)$.

Partie II : Théorème de Krein-Šmulian

Soit K un compact faible de X. On note $\overline{\text{co}}(K)$ l'enveloppe convexe fermée de K. On veut montrer le théorème suivant : $\overline{\text{co}}(K)$ *est un compact faible de* X.

On suppose dans un premier temps que X est séparable. On note $C_w(K)$ l'ensemble des fonctions continues sur K muni de la topologie faible. On munit cet espace de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

5. Montrer que l'on dispose d'une application d'inclusion naturelle $T : X^* \to C_w(K)$, qui est linéaire et continue.

6. Montrer que l'adjoint de T, noté $T^* : C_w(K)^* \to X^{**}$, est à valeurs dans $J(X)$.

Indication : On pourra s'aider du théorème de représentation de Riesz.

7. Soit B la boule unité de $C_w(K)^*$. Montrer que $J^{-1}T^*(B)$ est un compact faible convexe qui contient K. Conclure.

8. (Bonus.) Comment lever l'hypothèse de séparabilité sur X ?

⋆