Corrigé – TD 7

Convolution, Transformée de Fourier

Exercice 1. 1. Soient f une fonction *localement intégrable* sur $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}^n$) et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Montrer que la fonction $\varphi * f$ est définie *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. Montrer que $\phi\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \exp\Big(-\dfrac{1}{1-x^2}\Big)\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

3. (Fonctions plateaux $\mathcal{C}^\infty$). Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $K \subset U$. Montrer qu'il existe f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que

$$f = 1 \text{ sur } K, \quad f = 0 \text{ sur } U^c.$$

Corrigé :

1. On note K un compact tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a

$$|\varphi(x-y)f(y)| \leq \|\varphi\|_\infty |f(y)| \mathbf{1}_{x-K}(y).$$

Or la fonction $y \mapsto |f(y)|\mathbf{1}_{x-K}(y)$ est intégrable. Donc $\varphi * f$ est définie pour x. Soit $M > 0$ et $B(0,M)$ la boule fermée dans $\mathbb{R}^n$ centrée à 0 et de rayon M. On note $K_M = B(0,M) - K$. On a pour $x \in B(0,M)$,

$$\varphi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)f(y)\mathbf{1}_{x-K}(y)\lambda_n(dy) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)f(y)\mathbf{1}_{K_M}(y)\lambda_n(dy).$$

En appliquant le théorème de continuité sous le signe intégrale, on montre que $\varphi * f$ est continue sur $B_n(0,M)$. Ceci étant vrai pour tout $M > 0$ la fonction $\varphi * f$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. Puis on montre de même que la fonction $\varphi * f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

2. Il suffit de montrer que $f\colon x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\mathbf{1}_{\{x>0\}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour cela, on applique le théorème de la limite de la dérivée en 0, en remarquant que

$$\forall n \geq 1, \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\epsilon > 0$, on pose

$$\phi_\epsilon(x) = k_\epsilon \exp\Big(-\frac{1}{1-\epsilon^{-2}\|x\|^2}\Big)\mathbf{1}_{]-\epsilon,\epsilon[}(\|x\|),$$

où la constante k_ϵ est telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon \, d\lambda_n = 1$. On voit par la question précédente que $\phi_\epsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Soient $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$ tels que K est compact et U est ouvert. On pose

$$\delta := \min_{x\in K} d(x, \mathbb{R}^n \backslash U)\,.$$

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à `shen.lin@ens.fr`, ou bien à passer au bureau V7.

Comme $d(\cdot,\mathbb{R}^n\backslash U)$ atteint son minimum sur K en un point x_0 qui n'est pas dans le fermé $\mathbb{R}^n\backslash U$, on a $\delta > 0$. Pour tout $\epsilon < \delta$, on pose $K^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,K) \leq \epsilon\}$, qui est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, donc un compact. De plus on a $K \subset K^\epsilon \subset U$. On pose

$$\Phi_{K,U} = \mathbf{1}_{K^{\delta/3}} * \phi_{\delta/3},$$

et on vérifie que $\Phi_{K,U} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathbf{1}_K \leq \Phi_{K,U} \leq \mathbf{1}_U$.

Exercice 2 (Convolution de mesures finies sur $\mathbb{R}^n$)**.** Soient $\mu,\nu\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$ deux mesures finies. La *convolution de μ et de ν*, notée $\mu * \nu$, est la mesure image de $\mu \otimes \nu$ par l'application $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto x+y$, c'est-à-dire que pour toute fonction mesurable positive F sur $\mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} F d\mu * \nu = \int_{\mathbb{R}^n} d\mu(x) \int_{\mathbb{R}^n} d\nu(y) F(x+y).$$

1. Soient μ, ν, ρ trois mesures finies sur $\mathbb{R}^n$. Vérifier que

$$\mu * \delta_0 = \mu, \quad \mu * \nu(\mathbb{R}^n) = \mu(\mathbb{R}^n)\nu(\mathbb{R}^n) < \infty, \quad \mu * \nu = \nu * \mu \quad \text{et} \quad (\mu * \nu) * \rho = \mu * (\nu * \rho).$$

2. Soient $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions mesurables λ_n-intégrables. On pose $\mu = f\,\lambda_n$ et $\nu = g\,\lambda_n$. Vérifier que $\mu * \nu = (f * g)\,\lambda_n$.

Corrigé : Appliquer le théorème de Fubini et le changement de variable linéaire.

Exercice 3. Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. On suppose que pout toute fonction h de classe $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)h(x)\,dx.$$

Montrer que $f = g$ presque partout.

Corrigé : Pour tout choix de $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{]a,b[}$ est Lebesgue intégrable. On sait qu'il existe une suite $(h_n)_{n\geq 1}$ de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que $h_n \to \mathbf{1}_{]a,b[}$ λ-p.p. lorsque $n \to \infty$. Avec notre hypothèse et la convergence dominée, cela implique que

$$\int f\mathbf{1}_{]a,b[}d\lambda = \int g\mathbf{1}_{]a,b[}d\lambda.$$

Donc on conclut par l'exercice 1 du TD 5.

Exercice 4 (Théorème de Weierstrass)**.**

1. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\varphi_n\colon x \in \mathbb{R} \mapsto c_n(1-x^2)^n\,\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}$, où la constante c_n est choisie pour que $\int \varphi_n(x)dx = 1$. Vérifier que $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est une approximation de δ_0.
2. Soit $[a,b]$ un intervalle contenu dans $]0,1[$, et soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer en utilisant $\varphi_n * f$ que f est limite uniforme sur $[a,b]$ de fonctions polynomiales.

Corrigé :

1. facile.

2. On peut prolonger f en une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$ et à support compact contenu dans $[0,1]$ (prendre par exemple f affine sur les intervalles $[0,a]$ et $[b,1]$). Alors,

$$\varphi_n * f(x) = c_n \int (1-(x-y)^2)^n \, \mathbf{1}_{\{|x-y|\leq 1\}} f(y)dy \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

uniformément sur $[a,b]$. Pour $x \in [a,b]$, on peut clairement enlever l'indicatrice $\mathbf{1}_{\{|x-y|\leq 1\}}$, et on voit que f est approchée uniformément sur $[a,b]$ par des fonctions polynomiales.

Exercice 5.
Montrer en utilisant la convolution par $\mathbf{1}_{[0,1]}$ qu'il n'existe pas d'élément neutre pour la convolution dans $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, $f * g = g$ presque partout.

Corrigé : On suppose qu'il existe un élément neutre $f \in \mathscr{L}^1$. La fonction $\mathbf{1}_{[0,1]}$ est bornée, donc $f * \mathbf{1}_{[0,1]}$ est continue (et même uniformément continue). De plus $\mathbf{1}_{[0,1]} \in \mathscr{L}^1$, alors $f * \mathbf{1}_{[0,1]} = \mathbf{1}_{[0,1]}$ p.p. Ainsi $f * \mathbf{1}_{[0,1]}(x) = 1$ pour presque tout $x \in]0,1[$ et par continuité $f * \mathbf{1}_{[0,1]}(x) = 1$ pour tout $x \in]0,1[$. De même $f * \mathbf{1}_{[0,1]}(x) = 0$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Cela contredit la continuité de $f * \mathbf{1}_{[0,1]}$.

Exercice 6.

1. Soient $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.
2. En déduire que $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'élément neutre pour la convolution.

Corrigé :

1. Par définition on a

$$\widehat{f * g}(t) = \int_{\mathbb{R}} dx e^{ixt} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} dx e^{i(x-y)t} e^{iyt} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

Puisque $\iint |f(x-y)g(y)|dxdy \leq \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$, le théorème de Fubini s'applique et le changement de variable $x - y = z$ donne le résultat escompté.

2. Si $e \in \mathscr{L}^1$ est un élément neutre pour la convolution, alors

$$\forall f \in \mathscr{L}^1, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(t) = \widehat{f * e}(t) = \hat{f} \cdot \hat{e}(t).$$

Or il n'est pas difficile de trouver une fonction $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (prendre par exemple une densité Gaussienne). On en déduit que $\hat{e}(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui est en contradiction avec le lemme de Riemann-Lebesgue.

Exercice 7. Montrer en utilisant l'inversion de Fourier $\mathscr{L}^1$ que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iux}}{u^2+1} du\,.$$

Corrigé : On remarque que $x \mapsto e^{-|x|}$ est Lebesgue intégrable. Pour tout $a>0$, on a

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} dx\, e^{iux}e^{-|x|} &= \int_0^a dx\, e^{(iu-1)x} + \int_0^a dx\, e^{-(iu+1)x} \\ &= \frac{e^{(iu-1)a}-1}{iu-1} - \frac{e^{-(iu+1)a}-1}{iu+1} \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{iu+1} - \frac{1}{iu-1} = \frac{2}{u^2+1}\,.\end{aligned}$$

Par convergence dominée $\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} dx\, e^{iux}e^{-|x|} = \int_{\mathbb{R}} dx\, e^{iux}e^{-|x|}$. Donc

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} dx\, e^{iux}e^{-|x|} = \frac{2}{u^2+1}\,.$$

Comme le membre de droite est Lebesgue intégrable, la formule d'inversion de Fourier $\mathbb{L}^1$ donne le résultat voulu.

Exercice 8. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable de mesure $\lambda(E) > 0$. On suppose que pout tous $x, y \in E$, on a $\frac{x+y}{2} \in E$. Montrer que E contient un intervalle ouvert non vide.

Corrigé : Prenons un entier N suffisamment grand tel que $0 < \lambda(E \cap [-N,N]) < \infty$. Notons $E_0 = E \cap [-N,N]$. La fonction positive f définie par

$$f(x) := \int \mathbf{1}_{E_0}(2x-y)\mathbf{1}_{E_0}(y)dy$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Par hypothèse, $\frac{E_0+E_0}{2} \subset E_0$. En même temps, $f(x) = 0$ si $x \notin \frac{E_0+E_0}{2}$.

Supposons par l'absurde que $f = 0$. Comme $f(x/2) = \mathbf{1}_{E_0} * \mathbf{1}_{E_0}(x)$, on a

$$(\widehat{\mathbf{1}_{E_0}})^2 = \widehat{\mathbf{1}_{E_0} * \mathbf{1}_{E_0}} = 0.$$

Donc $\widehat{\mathbf{1}_{E_0}} = 0$. Mais alors par l'inversion de Fourier $\mathscr{L}^1$, $\mathbf{1}_{E_0} = 0$ λ-p.p., qui contredit le fait que $\lambda(E_0) > 0$. En conséquence, la fonction continue f est strictement positive sur un intervalle ouvert contenu dans E_0.

Exercice 9. Étudier la convergence de la suite $u_n = \int_{]0,\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}dt$. On précisera la limite si elle existe et on justifiera soigneusement la réponse.

Corrigé : On écrit

$$u_n = \int_{]0,1[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}dt + \int_{]1,\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}dt = I_n + J_n$$

et on étudie séparément les deux intégrales I_n et J_n.

Pour la première, on remarque que sur $]0,1[$ la quantité $\frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}$ tend simplement vers $\frac{1}{1+t}$, en étant dominée en valeur absolue par $1/(1+t)$, qui est une fonction intégrable sur $]0,1[$ indépendante de n. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, $I_n \to \int_{]0,1[} \frac{1}{1+t}dt = \ln(2)$.

Pour la seconde, pour $n \geq 1$, on remarque que sur $]1,\infty[$ la quantité $\frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}$ tend simplement vers 0, en étant dominée en valeur absolue par $\frac{1}{t(1+t)}$, qui est une fonction intégrable sur $]1,\infty[$ indépendante de n. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, $J_n \to 0$. On conclut que $u_n \to \ln(2)$. $\square$

Exercice 10. Soit $f\colon ([0,+\infty[, \mathcal{B}([0,+\infty[)) \to ([0,+\infty[, \mathcal{B}([0,+\infty[))$ une fonction mesurable.

1. Montrer que l'on définit une fonction continue $F\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par la formule
$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2}\, dt\,, \quad x \geq 0.$$
2. Calculer la limite de $F(x)$ quand $x \to +\infty$.
3. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que F soit dérivable en 0.

Corrigé :

1. On pose $g(x,t) = \arctan(xf(t))/(1+t^2)$ pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$. Alors pour tout $t \geq 0$ la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue. De plus pour tout $x \geq 0$ la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable et $|g(x,t)| \leq \pi/(2(1+t^2))$. Donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction F est continue sur $[0,+\infty[$.

2. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs convergeant vers $+\infty$. Alors $g(x_n,t) \to \pi/(2(1+t^2))\mathbf{1}_{\{f(t)\neq 0\}}$ pour tout $t \geq 0$. La domination utilisée à la question précédente permet d'utiliser le théorème de convergence dominée et d'obtenir que
$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \int_0^\infty \frac{\pi}{2(1+t^2)}\, \mathbf{1}_{\{f(t)\neq 0\}}\, dt.$$
Ainsi
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^\infty \frac{\pi}{2(1+t^2)}\, \mathbf{1}_{\{f(t)\neq 0\}}\, dt.$$

3. Pour tout $t \geq 0$ la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est dérivable de dérivée
$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} = \frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)}.$$
Soit $a > 0$. Pour tout $x \geq a$ on a
$$\left|\frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)}\right| \leq \frac{1}{a(1+t^2)}.$$
Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction F est dérivable sur $[a,+\infty[$ et ceci pour tout $a > 0$, elle est donc dérivable sur $]0,+\infty[$.

4. On va montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ si et seulement si la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ est intégrable. Supposons que la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ soit intégrable. Alors pour tout $x \geq 0$ on a
$$\left|\frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)}\right| \leq \frac{f(t)}{1+t^2}.$$

Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction F est dérivable sur $[0, +\infty[$. Supposons maintenant que la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ ne soit pas intégrable. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs convergeant vers 0. Alors pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{\arctan(x_n f(t))}{x_n(1+t^2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{f(t)}{1+t^2}.$$

Donc d'après le lemme de Fatou,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\arctan(x_n f(t))}{x_n(1+t^2)}\, dt = \infty.$$

Ainsi $F(x_n)/x_n \to \infty$ quand $n \to \infty$. □

Exercice 11.
Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction positive, monotone et intégrable. Quelle est la limite de la suite

$$\left(\int_0^1 f(x^n) dx\right)_{n\geq 1} ?$$

Corrigé : La fonction f étant monotone, elle admet une limite à droite en 0 que nous noterons α ($\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).

1. Premier cas : la fonction f est décroissante et $\alpha < \infty$. Alors la suite de fonctions positives $(f_n)_{n\geq 1}$ définies par
$$f_n(x) = f(x^n),\ x \in]0,1[,$$
est croissante et converge λ-p.p. vers α. Donc d'après le théorème de convergence monotone,
$$\int_{]0,1[} f(x^n)\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{]0,1[} \alpha\, d\lambda = \alpha.$$

2. Deuxième cas : la fonction f est décroissante et $\alpha = \infty$. Alors $(f_n)_{n\geq 1} \uparrow +\infty$ λ-p.p. donc d'après le théorème de convergence monotone,
$$\int_{]0,1[} f(x^n)\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

3. Troisième cas : la fonction f est croissante (on a $\alpha < \infty$ dans ce cas). Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et converge λ-p.p. vers α. De plus $f_1 = f$ est intégrable donc
$$\int_{]0,1[} f(x^n)\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha.$$

Exercice 12.
Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite quelconque de réels et $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\sum \sqrt{\alpha_n} < +\infty$.

1. Montrer à l'aide de Borel-Cantelli que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$\sum \frac{\alpha_n}{|x - a_n|} < +\infty.$$

2. À présent, montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sum \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x-a_n|}} < +\infty.$$

Corrigé :

1. Définissons la suite $f_n(x) = \frac{\sqrt{\alpha_n}}{\sqrt{|x-a_n|}}$ et $A_n = \{x \in \mathbb{R}, f_n(x)^2 > \sqrt{\alpha_n}\}$. Il est facile de vérifier que $A_n =]a_n - \sqrt{\alpha_n}, a_n + \sqrt{\alpha_n}[$, donc $\lambda(A_n) = 2\sqrt{\alpha_n}$ et $\sum \lambda(A_n) < \infty$. Par le lemme de Borel-Cantelli, $\lambda(\limsup A_n) = 0$, c'est-à-dire pour presque tout x, $f_n(x)^2 \leq \sqrt{\alpha_n}$ à partir d'un certain rang, et par conséquent, $\sum f_n(x)^2 < \infty$.

2. On note $f = \sum f_n$. Pour tout $k \geq 0$ on a par convergence monotone

$$\int_{[-k,k]} f d\lambda = \sum_{n\geq 0} \int_{[-k,k]} f_n d\lambda \leq \sum_{n \geq 0} \sqrt{\alpha_n} C_k,$$

avec C_k une constante ne dépendant que de k telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on ait

$$\int_{[-k,k]} \frac{1}{\sqrt{|x-a|}} d\lambda \leq C_k.$$

Ainsi, par hypothèse sur les $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, la fonction f est intégrable sur $[-k,k]$ donc finie presque partout, ce qui implique le résultat escompté.