PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 7
CHAÎNES DE MARKOV - DÉFINITION

**Exercice 1** (Chaîne de Markov et indépendance)**.**
Soient $S$ un ensemble dénombrable, $(G, \mathcal{G})$ un ensemble mesurable, $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(G, \mathcal{G})$ et $\phi : S \times G \longrightarrow S$ une application mesurable. On définit une suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $S$ par $X_0 = x \in S$ et $X_{n+1} = \phi(X_n, Z_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa fonction de transition.

**Correction :** Soient $n \geq 0$ et $(x_0, \ldots, x_n) \in S^n$. On a par indépendance:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) \\
= \;& \mathbb{P}(X_0 = x_0, \phi(x_0, Z_1) = x_1, \phi(x_1, Z_2) = x_2, \ldots, \phi(x_{n-1}, Z_n) = x_n) \\
= \;& \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(\phi(x, Z_1) = x_1)\mathbb{P}(\phi(x_1, Z_2) = x_2) \ldots \mathbb{P}(\phi(x_{n-1}, Z_n) = x_n) \\
= \;& \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(\phi(x, Z_1) = x_1)\mathbb{P}(\phi(x_1, Z_1) = x_2) \ldots \mathbb{P}(\phi(x_{n-1}, Z_1) = x_n)\,.
\end{aligned}$$

On pose, pour $(y, z) \in S^2$, $Q(y, z) = \mathbb{P}(\phi(y, Z_1) = z)$. On peut alors écrire

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)Q(x_0, x_1)Q(x_1, x_2) \ldots Q(x_{n-1}, x_n)\,.$$

Cela signfie que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de fonction de transition $Q$.

**Exercice 2** (Probabilité d'extinction pour un Galton-Watson)**.**
Soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ un processus de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu = (p_k)_{k\geq 0}$ telle que $p_0 + p_1 < 1$. On pose $f(x) = \sum_{k\geq 0} p_k x^k$ la fonction génératrice de la loi de reproduction et $m = f'(1) = \sum k p_k$. Le but du problème est de calculer la probabilité d'extinction du processus $(Z_n)$.

1. Montrer que $(Z_n)$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition donnée par
$$Q(0, 0) = 1, \quad \text{et} \quad Q(i, j) = \mu^{*i}(j) \quad \text{si } i \geq 1.$$
2. Montrer que
$$\mathbb{E}_i[s^{Z_n}] = \sum_{j=0}^{\infty} Q^n(i, j)s^j = (f_n(s))^i,$$
où la suite de fonction $(f_n)$ est définie par récurrence $f_1 = f$ et $f_{n+1} = f_n \circ f$.
3. On pose $\tau_0 = \inf\{n \geq 0 : Z_n = 0\}$. Montrer que $\mathbb{P}_1(\tau_0 < \infty) = \lim_{n\to\infty} f_n(0)$.
4. En étudiant la fonction $f$ en déduire que $\mathbb{P}_1(\tau_0 < \infty)$ est la plus petite solution de $f(t) = t$ dans $[0, 1]$. En particulier remarquez que $f$ est convexe et admet une solution $f(t) = t$ strictement plus petite que $1$ si et seulement si $m > 1$.

**Correction :**

1. Non corrigé. On rappelle que la notation $\mu^{*i}$ signifie la $i$-ième convolée de $\mu$.

2. On montre le résultat par récurrence. Pour $n = 1$, on a

$$\sum_{j=0}^{\infty} Q(i,j)s^j = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{*i}(j)s^j = (f(s))^i,$$

d'après les propriétés classiques de la convolution vis-à-vis des fonctions génératrices. Pour $n \geq 2$, on applique la propriété de Markov faible en $n$ et l'hypotèèse de récurrence pour obtenir

$$\mathbb{E}_i[s^{Z_{n+1}}] = \mathbb{E}_i\left[\mathcal{E}_{Z_n}[s^{Z_1}]\right] = \mathbb{E}_i[(f(s))^{Z_n}] = (f_n(f(s)))^i = (f_{n+1}(s))^i,$$

comme demandé.

3. On remarque que $\{\tau_0 \leq n\} = \{Z_n = 0\}$, or $\mathbb{P}_1(Z_n = 0) = f_n(0)$. Ainsi on a

$$\mathbb{P}_1(\tau_0 \leq n) = f_n(0)) \longrightarrow \mathbb{P}_1(\tau_0 < \infty).$$

4. C'est une étude classique de fonction définie par récurrence.

**Exercice 3** ($h$-transformée d'une matrice stochastique)**.**
Soit $S$ un ensemble dénombrable, $Q = (Q(i,j))_{i,j\in S}$ une matrice stochastique et $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne canonique sur $S$ de matrice de transition $Q$. Soir $h : S \to \mathbb{R}_+$ une application bornée telle que pour tout $i \in S$, $(h(X_n))_{n\geq 0}$ soit une martingale sous $\mathbb{P}_i$ pour la filtration canonique. Soit $P$ la matrice définie sur $S_+ = \{x \in S, h(x) > 0\}$ par la formule

$$P(i,j) = \frac{h(j)}{h(i)}Q(i,j).$$

1. Montrer que $P$ est une matrice stochastique. *On dit que $P$ est la $h$-transformée de $Q$.*

2. On considère la marche aléatoire simple $S_n$ sur $\mathbb{Z}$. On note $T_i = \inf\{n \geq 0, S_n = i\}$. Pour $N > 0$ et $k \in [[0,N]]$, on définit

$$\mathbb{P}_k^{(N)} = \mathbb{P}_k[\ .\ |T_N < T_0].$$

   (a) Rappelons que $\mathbb{P}_k[T_N < T_0] = \frac{k}{N}$. Montrer que sous $P_k^{(N)}$, $(S_{n\wedge T_N})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.

   (b) Trouver une fonction $h : [[0,N]] \to \mathbb{R}_+$ telle que la matrice de transition de la question précédente soit la $h$-transformée de la matrice de transition de la marche aléatoire simple arrêtée en 0 et $N$.

**Correction :**

1. Il est trivial que la mreice $P$ est à coefficients positifs. Il suffit de vérifier que la somme par lignes fait 1. Ceci se déduit de la condition "$h(X_n)$ est une martingale sous $\mathbb{P}_i$ :

$$\mathbb{E}_i[h(X_0)] = \mathbb{E}_i[h(X_1)] \Longrightarrow h(i) = \sum_j Q(i,j)h(j).$$

2. Calculons :

$$\begin{aligned} & P_k^{(N)}[X_{n+1} = x_{n+1} \,| X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] \\ = \; & \frac{\mathbb{P}_k[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1} \text{ et } T_N < T_0]}{\mathbb{P}_k[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n \text{ et } T_N < T_0]}. \end{aligned}$$

Calculons l'un des termes :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_k[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n \text{ et } T_N < T_0] \\ = \; & \mathbb{P}_k[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] \cdot \mathbb{P}_k[T_N < T_0 \mid X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] \\ = \; & \frac{1}{2^n} \cdot \frac{x_n}{N}. \end{aligned}$$

Et de la même manière,

$$\mathbb{P}_k[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1} \text{ et } T_N < T_0] = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1}}{N}.$$

$$P_k^{(N)}[X_{n+1} = x_{n+1} \,| X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] = \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

la marche arrêtée sous la proba $P_k^{(N)}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$Q(x,y) = \frac{y}{x} \mathbb{1}_{|x-y|=1} \text{ et } Q(N,N) = 1.$$

Je laisse le lecteur vérifier que ceci est la $h$ transformée de la marche aléatoire simple arrêtée, avec $h(x) = x$.

**Exercice 4** (Propriété de Markov faible**).**
Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace dénombrable $S$, de fonction de transition $Q$, issue de $x$ sous $\mathbb{P}_x$. Soit $F$ un sous-ensemble non vide de $S$. On pose

$$T_F \;=\; T_F(X_0, X_1, \ldots) \;=\; \inf\{n \geq 0 : X_n \in F\}\,.$$

1. Montrer que pour toute fonction $h$ positive bornée définie sur $F$, la fonction $g$ définie par

$$\forall x \in S \qquad g(x) \;=\; \mathbb{E}_x\left(h(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F < \infty\}}\right)$$

est solution du problème suivant:

$$\begin{aligned} g(x) &= Qg(x), \;\; \forall x \in F^c \\ g(x) &= h(x), \;\; \forall x \in F\,. \end{aligned}$$

*On va montrer que $g$ est la solution positive minimale de ce problème.*

2. Soit $f$ une autre solution positive de ce problème. Montrer que pour tout $n \geq 0$

$$f(x) \;=\; \mathbb{E}_x\left(f(X_{n \wedge T_F})\right).$$

3. En déduire que $f \geq g$.

**Correction :**

1. Pour $x \in F$, $\mathbb{P}_x$-p.s, on a $T_F = 0$, et donc$g(x) = \mathbb{E}_x(h(X_0)) = h(x)$. Pour $x \notin F$, $\mathbb{P}_x$-p.s., on a $T_F \geq 1$et donc

   $$T_F(X_0, X_1, ...) \;=\; \inf\{n \geq 1 \,|\, X_n \in F\} \;=\; 1+\inf\{n \geq 0 \,|\, X_{n+1} \in F\} \;=\; 1+T_F(X_1, X_2, ...)\,,$$

   donc d'après la propriété de Markov faible appliquée au temps 1,

   $$\begin{aligned} g(x) &= \mathbb{E}_x[h(X_{T_F(X_0,X_1,...)})\mathbb{1}_{T_F(X_0,.X_1,...)<\infty}] \\ &= \mathbb{E}_x[h(X_{1+T_F(X_1,X_2,...)})\mathbb{1}_{T_F(X_1,X_2,...)<\infty}] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathcal{E}_{X_1}(h(Y_{T_F(Y_0,Y_1,...)})\mathbb{1}_{T_F(Y_0,Y_1,...)<\infty})] \\ &= \mathbb{E}_x[g(X_1)] \\ &= Qg(x)\,, \end{aligned}$$

   où $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans toute la suite une chaîne de Markov de même fonction de transition que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, issue p.s. de $y$ sous la loi $\mathcal{L}_y$ (d'espérance notée $\mathcal{E}_y$), et $Qg$ est défini dans l'introduction de ce TD. Ainsi, $g$ est solution du problème.

2. On va montrer le résultat par récurrence sur $n$. C'est évident pour $n = 0$. Soit $n \geq 0$. On suppose le résultat démontré au rang $n$. On a

   $$\mathbb{E}_x\left[f\left(X_{(n+1)\wedge T_F}\right)\right] \;=\; \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{n+1}\right)\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right] + \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{T_F}\right)\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}}\right]\,.$$

   L'ensemble $\{T_F \geq n+1\}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable (avec $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$), donc d'après la propriété de Markov faible appliquée au temps $n$ (ou la définition même de la chaîne de Markov), on a

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{n+1}\right)\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right] &= \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}\left(f\left(X_{n+1}\right) \mid \mathcal{F}_n\right)\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathcal{E}_{X_n}\left(f\left(Y_1\right)\right)\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[Qf\left(X_n\right)\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[f\left(X_n\right)\mathbb{1}_{\{T_F\geq n+1\}}\right]\,, \end{aligned}$$

   la dernière égalité étant obtenue car $f$ est solution du problème et $X_n \notin F$ si $T_F \geq n+1$. On a donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

   $$\mathbb{E}_x\left[f\left(X_{(n+1)\wedge T_F}\right)\right] \;=\; \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{n\wedge T_F}\right)\right] \;=\; f(x)\,.$$

3. D'après la question 2., pour tout $n \geq 0$, on a

   $$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{n\wedge T_F}\right)\right] \\ &\geq \mathbb{E}_x\left[f\left(X_{T_F}\right)\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}}\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[h\left(X_{T_F}\right)\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}}\right]\,. \end{aligned}$$

   Or la suite $\left(h\left(X_{T_F}\right)\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}}\right)_{n\geq 0}$ est croissante et positive et

   $$h\left(X_{T_F}\right)\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} h\left(X_{T_F}\right)\mathbb{1}_{\{T_F<\infty\}}\,.$$

Donc, d'après le TCM,

$$\mathbb{E}_x\left[h\left(X_{T_F}\right)\mathbb{1}_{\{T_F\leq n\}}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_x\left[h\left(X_{T_F}\right)\mathbb{1}_{\{T_F<\infty\}}\right] = g(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in S$, $f(x) \geq g(x)$.

**Exercice 5** (Un dernier exercice de martingales)**.**
Un singe tape des lettres au hasard (indépendamment, uniformément) sur une machine à écrire au rythme d'une par seconde. On se demande au bout de combien de temps (en espérance) le singe aura tapé le mot "ABRACADABRA". On joue alors au jeu suivant : juste *avant* chaque seconde $n = 1, 2, 3, \ldots$ un joueur arrive derrière le singe et parie 1€ avec lui sur l'évènement

$$\{\text{la } n\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "A"}\}.$$

Si il perd, il part (et le singe met 1€ dans son sac). Si il gagne, il reçoit 26€ du singe qu'il remise immédiatement sur l'évènement

$$\{\text{la } (n+1)\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "B"}\}.$$

Si il perd, il part. Si il gagne, il reçoit $26^2 = 676$€ qu'il remise immédiatement sur le "R", puis sur le "A", etc. Ainsi de suite jusqu'à ce que "ABRACADABRA" sorte de la machine, on notera $T$ ce temps d'arrêt. Notez qu'il peut y avoir jusqu'à trois joueurs en train de miser derrière le singe...

1. Montrer que l'argent reçu par le singe jusqu'au temps $n$ est une martingale.
2. En déduire
$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$
3. Refaire le même exercice en remplaçant "ABRACADABRA" par "ABCDEFGHIJK". Commentez.

**Correction :**

1. Il faut montrer que chaque étape est de moyenne nulle. À la première étape, le singe gagne 1€avec proba $25/26$ et perd 25 €avec proba $1/26$. Chaque étape se déroule de la même manière. Notons $M_n$ l'argent gagné par le singe après $n$ étapes.
2. Au temps $T$, lorsque ABRACADABRA apparaît, on arrête tous les jeux. Donc si $n \geq T$,
$$M_n = M_T = T - (26^{11} + 26^4 + 26)$$
(le singe a reçu $T$ €et a du payer trois personnes à la fin : celui qui est arrivé au temps $T-11$ et a deviné ABRACADABRA, celui qui est arrivé au temps $T-4$ et a deviné ABRA, et celui qui est arrivé au temps $T-1$ et a deviné A). Donc $M_n \longrightarrow M_T$ p.s. Si on arrive a montrer que la convergence a lieu dans $\mathbf{L}^1$ on a gagné. Il suffit de remarquer que :
$$|M_n| \leq max(T\ ,\ (26^{11} + 26^4 + 26)),$$
$26^{11}+26^4+26$ est constant donc intégrable et $T$ peut être majoré par un temps exponentiel, qui est lui aussi intégrable. Donc par convergence dominée :
$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$
3. Si on remplace "ABRACADABRA" par "ABCDEFGHIJK", on trouve $\mathbb{E}[T] = 26^{11}$. Je vous laisse chercher pourquoi.