PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 7
CHAÎNES DE MARKOV - DÉFINITION

Exercice 1 (Chaîne de Markov et indépendance)**.**
Soient S un ensemble dénombrable, $(G, \mathcal{G})$ un ensemble mesurable, $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(G, \mathcal{G})$ et $\phi : S \times G \longrightarrow S$ une application mesurable. On définit une suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans S par $X_0 = x \in S$ et $X_{n+1} = \phi(X_n, Z_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa fonction de transition.

Exercice 2 (Probabilité d'extinction pour un Galton-Watson)**.**
Soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ un processus de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu = (p_k)_{k\geq 0}$ telle que $p_0 + p_1 < 1$. On pose $f(x) = \sum_{k\geq 0} p_k x^k$ la fonction génératrice de la loi de reproduction et $m = f'(1) = \sum k p_k$. Le but du problème est de calculer la probabilité d'extinction du processus (Z_n).

1. Montrer que (Z_n) est une chaîne de Markov de probabilité de transition donnée par
$$Q(0,0) = 1, \quad \text{et} \quad Q(i,j) = \mu^{*i}(j) \quad \text{si } i \geq 1.$$
2. Montrer que
$$\mathbb{E}_i[s^{Z_n}] = \sum_{j=0}^{\infty} Q^n(i,j) s^j = (f_n(s))^i,$$
où la suite de fonction (f_n) est définie par récurrence $f_1 = f$ et $f_{n+1} = f_n \circ f$.
3. On pose $\tau_0 = \inf\{n \geq 0 : Z_n = 0\}$. Montrer que $\mathbb{P}_1(\tau_0 < \infty) = \lim_{n\to\infty} f_n(0)$.
4. En étudiant la fonction f en déduire que $\mathbb{P}_1(\tau_0 < \infty)$ est la plus petite solution de $f(t) = t$ dans $[0,1]$. En particulier remarquez que f est convexe et admet une solution $f(t) = t$ strictement plus petite que 1 si et seulement si $m > 1$.

Exercice 3 (h-transformée d'une matrice stochastique)**.**
Soit S un ensemble dénombrable, $Q = (Q(i,j))_{i,j\in S}$ une matrice stochastique et $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne canonique sur S de matrice de transition Q. Soir $h : S \to \mathbb{R}_+$ une application bornée telle que pour tout $i \in S$, $(h(X_n))_{n\geq 0}$ soit une martingale sous $\mathbb{P}_i$ pour la filtration canonique. Soit P la matrice définie sur $S_+ = \{x \in S, h(x) > 0\}$ par la formule
$$P(i,j) = \frac{h(j)}{h(i)} Q(i,j).$$

1. Montrer que P est une matrice stochastique. *On dit que P est la h-transformée de Q.*
2. On considère la marche aléatoire simple S_n sur $\mathbb{Z}$. On note $T_i = \inf\{n \geq 0, S_n = i\}$. Pour $N > 0$ et $k \in [[0, N]]$, on définit
$$\mathbb{P}_k^{(N)} = \mathbb{P}_k[\ .\ | T_N < T_0].$$
   (a) Rappelons que $\mathbb{P}_k[T_N < T_0] = \frac{k}{N}$. Montrer que sous $P_k^{(N)}$, $(S_{n\wedge T_N})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.

(b) Trouver une fonction $h : [[0,N]] \to \mathbb{R}_+$ telle que la matrice de transition de la question précédente soit la h-transformée de la matrice de transition de la marche aléatoire simple.

Exercice 4 (Propriété de Markov faible)**.**
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace dénombrable S, de fonction de transition Q, issue de x sous $\mathbb{P}_x$. Soit F un sous-ensemble non vide de S. On pose

$$T_F \;=\; T_F(X_0, X_1, ...) \;=\; \inf\{n \geq 0 : X_n \in F\}\,.$$

1. Montrer que pour toute fonction h positive bornée définie sur F, la fonction g définie par

$$\forall x \in S \qquad g(x) \;=\; \mathbb{E}_x\left(h(X_{T_F})\mathbb{1}_{\{T_F<\infty\}}\right)$$

est solution du problème suivant:

$$\begin{aligned} g(x) &= Qg(x),\ \ \forall x \in F^c \\ g(x) &= h(x),\ \ \forall x \in F\,. \end{aligned}$$

On va montrer que g est la solution positive minimale de ce problème.

2. Soit f une autre solution positive de ce problème. Montrer que pour tout $n \geq 0$

$$f(x) \;=\; \mathbb{E}_x\left(f(X_{n\wedge T_F})\right).$$

3. En déduire que $f \geq g$.

Exercice 5 (Un dernier exercice de martingales)**.**
Un singe tape des lettres au hasard (indépendamment, uniformément) sur une machine à écrire au rythme d'une par seconde. On se demande au bout de combien de temps (en espérance) le singe aura tapé le mot "ABRACADABRA". On joue alors au jeu suivant : juste *avant* chaque seconde $n = 1, 2, 3, \ldots$ un joueur arrive derrière le singe et parie 1€ avec lui sur l'évènement

$$\{\text{la } n\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "A"}\}.$$

Si il perd, il part (et le singe met 1€ dans son sac). Si il gagne, il reçoit 26€ du singe qu'il remise immédiatement sur l'évènement

$$\{\text{la } (n+1)\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "B"}\}.$$

Si il perd, il part. Si il gagne, il reçoit $26^2 = 676$€ qu'il remise immédiatement sur le "R", puis sur le "A", etc. Ainsi de suite jusqu'à ce que "ABRACADABRA" sorte de la machine, on notera T ce temps d'arrêt. Notez qu'il peut y avoir jusqu'à trois joueurs en train de miser derrière le singe...

1. Montrer que l'argent reçu par le singe jusqu'au temps n est une martingale.

2. En déduire
$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$

3. Refaire le même exercice en remplaçant "ABRACADABRA" par "ABCDEFGHIJK". Commentez.