TD 7

Exercice 1.

Soit G un groupe et K un corps. La représentation régulière de G sur K est-elle irréductible ?

Exercice 2.

Soit G un groupe fini, soit H un sous-groupe distingué dans G, notons $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Soit ρ une représentation complexe de G/H.

1. Montrer que $\rho \circ \pi$ est une représentation de G.
2. Montrer que ρ est irréductible si et seulement si $\rho \circ \pi$ est irréductible.
3. Soit τ une représentation complexe de G. Démontrer que si $\tau_{|H}$ est une représentation irréductible de H, alors τ est irréductible. Donner un contre-exemple à la réciproque de cette assertion avec $G = \mathfrak{S}_3$.

Exercice 3.

Déterminer les représentations complexes infidèles de $\mathfrak{S}_n$ pour tout n.

Exercice 4.

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, soit G un groupe et soit (V, ρ) une représentation de G. On suppose qu'il existe $v \in V$ tel que $\{\rho(g)v \mid g \in G\}$ forme une base de V. Montrer que (V, ρ) est isomorphe à la représentation régulière de G.

Exercice 5.

1. Démontrer que tout groupe admet une représentation fidèle sur tout corps.
2. Si G est un groupe fini, démontrer que celui-ci admet une représentation fidèle de dimension finie sur tout corps K.
3. Pour chaque corps K, donner un exemple de groupe G qui n'admet aucune représentation fidèle de dimension finie sur K.
4. Démontrer que le groupe $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ n'admet aucune représentation fidèle de dimension finie sur un corps de caractéristique différente de 2, mais qu'il en admet une sur au moins un corps de caractéristique 2.
5. Donner un exemple de groupe qui n'admet de représentation fidèle de dimension finie sur aucun corps.

Exercice 6.

Soit p un nombre premier et soit K un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. Soit G un p-groupe. Montrer que G possède une représentation non triviale de dimension 1 sur K.

Exercice 7.

Soient p un nombre premier, G un p-groupe fini et K un corps de caractéristique p.

1. Montrer que toute représentation linéaire de G sur un K-espace vectoriel non nul admet au moins un vecteur fixe non nul.
2. Montrer que toute représentation irréductible de G à coefficients dans K est isomorphe à la représentation triviale.

Exercice 8.

Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $F \subset E$ des corps tels que E est un F-espace vectoriel de dimension n. On suppose l'existence d'un groupe G de cardinal n, composé d'automorphismes de E, tel que le corps $E^G = \{e \in E \mid \forall g \in G,\ ge = e\}$ est exactement F.

1. Montrer que les éléments de G sont linéairement indépendants.
2. Soit V un E-espace vectoriel, muni d'une action F-linéaire de G, telle que $g(\lambda v) = g(\lambda)g(v)$ pour g dans G et v dans V. Démontrer que V admet une E-base formée de vecteurs fixes par G, et donc que V est isomorphe à E^n pour un certain n, muni de l'action composante par composante de G.