7 Chaînes de Markov (Récurrence, Transience, Mesures invariantes)

Pour la culture : Comparer le théorème de Perron-Frobenius avec le théorème d'existence et d'unicité d'une mesure invariante pour une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états fini.

Exercice 7.1. Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple $\pm$ sur $\mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$ avec $k \neq 0$, montrer que l'espérance du nombre de visites de k avant le premier retour en 0 est 1.

Exercice 7.2. Montrer que la marche aléatoire simple sur l'arbre binaire complet est transiente. Indication : Comparer la distance á l'origine avec une marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{N}$.

Exercice 7.3 (Chaîne de naissance et de mort)**.** Soit Q la fonction de transition sur $\mathbb{N}$ donnée par:

$$Q = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

avec $p_0 > 0$, $p_0 + r_0 = 1$, $p_i > 0$, $q_i > 0$ et $p_i + r_i + q_i = 1$ pour $i \geq 1$. Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction de transition Q.

1. Montrer que X est irréductible.
2. On suppose que
$$\sum_{i\geq 1} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} < \infty .$$
Montrer que X admet une mesure de probabilité réversible π qu'on déterminera. Que peut-on en déduire sur X ?
3. On considère le cas où $p_i = p > 0$ pour tout $i \geq 0$ et $q_i = q > 0$ pour tout $i \geq 1$ avec $p < q$. Calculer $\mathbb{E}_i(H_i)$ pour tout $i \geq 0$, où $H_i = H_i(X_0, X_1, \ldots) = \inf\{n \geq 1 \,:\, X_n = i\}$ désigne le premier temps de retour en i.

Exercice 7.4 (Condition de Kolmogorov pour la réversibilité)**.** On considère une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état dénombrable S, de fonction de transition Q. Montrer que la chaîne admet une mesure réversible (*) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- $\forall (x,y) \in S^2 \qquad Q(x,y) > 0 \Longrightarrow Q(y,x) > 0;$
- Pour toute "boucle" $x_0, x_1, \ldots, x_n = x_0$ telle que $\prod_{i=1}^n Q(x_i, x_{i-1}) > 0$, on a
$$\prod_{i=1}^n \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} = 1 .$$

(*) Attention, nous parlons ici d'une mesure réversible μ, pas nécessairement d'une mesure de probabilité, i.e., la mesure μ vérifie :

$$\forall (x,y) \in S^2 \qquad \mu(x)Q(x,y) = \mu(y)Q(y,x).$$

Exercice 7.5 (Existence et unicité des mesures invariantes).

- Une chaîne de Markov qui est récurrente a-t-elle une mesure invariante ? Réciproque ?
- Si une chaîne de Markov a une mesure invariante finie, est-elle récurrente ?
- Une chaîne de Markov admet-elle toujours une mesure invariante (non nulle) ?
- Et si elle est irréductible ?
- Si il existe une mesure invariante (non nulle), est-elle unique ?