7 Chaînes de Markov (Récurrence, Transience, Mesures invariantes)

Pour la culture : Comparer le théorème de Perron-Frobenius avec le théorème d'existence et d'unicité d'une mesure invariante pour une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états fini.

Exercice 7.1. Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple $\pm$ sur $\mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$ avec $k \neq 0$, montrer que l'espérance du nombre de visites de k avant le premier retour en 0 est 1.

Exercice 7.2. Montrer que la marche aléatoire simple sur l'arbre binaire complet est transiente. Indication : Comparer la distance á l'origine avec une marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{N}$.

Correction : Fais en TD.

Exercice 7.3 (Chaîne de naissance et de mort)**.** Soit Q la fonction de transition sur $\mathbb{N}$ donnée par:

$$Q = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

avec $p_0 > 0$, $p_0 + r_0 = 1$, $p_i > 0$, $q_i > 0$ et $p_i + r_i + q_i = 1$ pour $i \geq 1$. Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction de transition Q.

1. Montrer que X est irréductible.
2. On suppose que
$$\sum_{i\geq 1} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} < \infty .$$
Montrer que X admet une mesure de probabilité réversible π qu'on déterminera. Que peut-on en déduire sur X ?
3. On considère le cas où $p_i = p > 0$ pour tout $i \geq 0$ et $q_i = q > 0$ pour tout $i \geq 1$ avec $p < q$. Calculer $\mathbb{E}_i(H_i)$ pour tout $i \geq 0$, où $H_i = H_i(X_0, X_1, \dots) = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}$ désigne le premier temps de retour en i.

Correction :

1. Soient $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$. On remarque que
$$\begin{aligned} Q^{j-i}(i,j) &\geq Q(i,i+1)\dots Q(j-1,j) = p_i \dots p_{j-1} > 0 \text{ si } i < j \\ Q^{i-j}(i,j) &\geq Q(i,i-1)\dots Q(j+1,j) = q_i \dots q_{j+1} > 0 \text{ si } i > j \\ Q^2(i,i) &\geq Q(i,i+1)Q(i+1,i) = p_i q_{i+1} > 0 , \end{aligned}$$
donc X est irréductible.

2. Soit π une mesure de probabilité. Elle est réversible ssi pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\pi(i)p_i \;=\; \pi(i+1)q_{i+1}\,. \tag{1}$$

En effet cette condition est suffisante car si $j \neq i \pm 1$, la condition $\pi(i)Q(i,j) = \pi(j)Q(j,i)$ est triviale. La condition (1) est équivalente à : pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\pi(i) \;=\; \pi(0) \times \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} \tag{2}$$

Il suffit donc de vérifier qu'il existe une mesure de probabilité qui satisfait (2). Or

$$C \;=\; \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} \in]0,+\infty[$$

par hypothèse donc on peut poser $\pi(0) = C^{-1}$ pour obtenir $\sum_i \pi(i) = 1$. On en déduit que la mesure π définie par

$$\forall i \in \mathbb{N}\,, \qquad \pi(i) = C^{-1}\frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i}$$

est bien une probabilité réversible pour la chaîne.

La mesure π étant réversible, elle est également invariante. Puisque la chaîne est irréductible et admet une probabilité invariante, on sait qu'elle est aussi récurrente positive.

Remarque : la probabilité invariante est alors unique.

3. Dans ce cas,

$$C \;=\; \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} \;=\; \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{p^i}{q^i} \;=\; \frac{q}{q-p}\,.$$

L'hypothèse de la question 2. est bien vérifiée, et la mesure de probabilité invariante est donnée par

$$\pi(i) \;=\; \frac{(q-p)p^i}{q^{i+1}}\,.$$

Or, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}_i(H_i) = \pi(i)^{-1}$ (cas d'une chaîne irréductible récurrente positive). Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}_i(H_i) \;=\; \frac{q^{i+1}}{(q-p)p^i}\,.$$

Exercice 7.4 (Condition de Kolmogorov pour la réversibilité)**.** On considère une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état dénombrable S, de fonction de transition Q. Montrer que la chaîne admet une mesure réversible (*) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

- $\forall (x,y) \in S^2 \qquad Q(x,y) > 0 \Longrightarrow Q(y,x) > 0$;
- Pour toute "boucle" $x_0, x_1, ..., x_n = x_0$ telle que $\prod_{i=1}^n Q(x_i, x_{i-1}) > 0$, on a

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{Q(x_{i-1},x_i)}{Q(x_i,x_{i-1})} \;=\; 1\,.$$

(*) Attention, nous parlons ici d'une mesure réversible μ, pas nécessairement d'une mesure de probabilité, i.e., la mesure μ vérifie :

$$\forall (x,y) \in S^2 \qquad \mu(x)Q(x,y) = \mu(y)Q(y,x).$$

Corrrection : Supposons qu'il existe une mesure réversible μ, i.e., μ n'est pas identiquement nulle (cette partie de la définition est souvent omise car trivialement vérifiée...) et pour tout $(x,y) \in S^2$, $\mu(x)Q(x,y) = \mu(y)Q(y,x)$. Montrons d'abord que $\mu(x) > 0$, pour tout $x \in S$. Supposons qu'il existe x tel que $\mu(x) = 0$. Soit $y \in S$. Puisque la chaîne est irréductible, il existe $x_0 = y, x_1, ..., x_n = x$ tels que $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour $i = 1 \cdots n$. La condition de réversibilité de μ pour le couple $(x_n - 1, x)$ donne alors

$$\mu(x_{n-1})Q(x_{n-1}, x) = \mu(x)Q(x, x_{n-1}) = 0\,,$$

et donc $\mu(x_{n-1}) = 0$. Par une récurrence immédiate, on obtient $\mu(y) = 0$, donc μ est identiquement nulle, ce qui est absurde. On a donc $\mu(x) > 0$ pour tout $x \in S$. La condition de réversibilité s'écrit alors pour tous $(x,y) \in S^2$

$$Q(y,x) = \frac{\mu(x)}{\mu(y)} Q(x,y)$$

donc

$$Q(x,y) > 0 \Longrightarrow Q(y,x) > 0\,.$$

Finalement, si on considère une boucle $x_0, x_1, ..., x_n = x_0$ telle que $\prod_{i=1}^n Q(x_i, x_{i-1}) > 0$, on a

$$\prod_{i=1}^n \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} = \prod_{i=1}^n \frac{\mu(x_i)}{\mu(x_{i-1})} = 1\,,$$

ce qui achève la démonstration de la première implication.

• Réciproquement, supposons que les conditions données dans l'énoncé sont satisfaites. Nous allons définir une mesure réversible μ. Soit x fixé arbitrairement dans S, on pose $\mu(x) = 1$. Soit $y \in S$, puisque la chaîne est irréductible il existe $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ tels que $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour tout $i = 1, ..., n$. Une condition nécessaire pour que μ soit réversible est que pour tout $i = 1, ..., n$, $\mu(x_{i-1})Q(x_{i-1}, x_i) = \mu(x_i)Q(x_i, x_{i-1})$. Puisque $Q(x_i, x_{i-1}) > 0$ également pour tout i par hypothèse, on obtient immédiatement que

$$\mu(y) = \prod_{i=1}^n \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})}\,.$$

Vérifions que $\mu(y)$ est bien défini, c'est à dire que sa valeur ne dépend pas du chemin $x_0 = x, x_1, ..., x_n = y$ (tel que $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour tout $i = 1, ..., n$) choisi. Soit $y_0 = x, y_1, ..., y_m = y$ un autre chemin tel que $Q(y_{i-1}, y_i) > 0$ pour tout $i = 1, ..., m$. Il faut montrer que

$$\prod_{i=1}^n \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} = \prod_{i=1}^m \frac{Q(y_{i-1}, y_i)}{Q(y_i, y_{i-1})}\,. \tag{3}$$

Si on note $(z_0, ..., z_{n+m}) = (x, x_1, ..., x_{n-1}, y, y_{m-1}, ..., y_1, x)$, on voit que $(z_0, ..., z_{n+m} = z_0)$ est une boucle telle que $\prod_{i=1}^{n+m} Q(z_i, z_{i-1}) > 0$ (par construction des (x_i) et des (y_i), et grâce à l'hypothèse $Q(x,y) > 0 \Longrightarrow Q(y,x) > 0$), donc on sait que

$$\prod_{i=1}^{n+m} \frac{Q(z_{i-1}, z_i)}{Q(z_i, z_{i-1})} = 1\,,$$

ce qui donne exactement l'égalité (3) cherchée. La mesure μ est ainsi bien définie partout, et non identiquement nulle. Il reste à vérifier qu'elle est bien réversible. Soit z un autre état de S, il suffit de vérifier que $\mu(y)Q(y,z) = \mu(z)Q(z,y)$. Si $Q(y,z) = 0$, alors $Q(z,y) = 0$ et l'égalité est triviale. Si $Q(y,z) > 0$, alors en reprenant le chemin $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ utilisé pour définir $\mu(y)$, on construit un chemin $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y, x_{n+1} = z$ de x à z tel que $Q(x_{i-1}, x_i) > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, (n+1)$, et par construction de μ on a

$$\mu(z) = \prod_{i=1}^{n+1} \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} = \mu(y)\frac{Q(y,z)}{Q(z,y)},$$

donc μ est bien réversible.

Exercice 7.5 (Existence et unicité des mesures invariantes)**.**

- Une chaîne de Markov qui est récurrente a-t-elle une mesure invariante ? Réciproque ?
- Si une chaîne de Markov a une mesure invariante finie, est-elle récurrente ?
- Une chaîne de Markov admet-elle toujours une mesure invariante (non nulle) ?
- Et si elle est irréductible ?
- Si il existe une mesure invariante (non nulle), est-elle unique ?

Indications : Oui, Non. Oui. Après, les réponses sont toujours non. Dans le premier cas considérer $Q(i, i+1) = 1$ sur $\{0, 1, 2, \ldots\}$. On peut modifier l'exemple précédent pour qu'il soit irréductible. Pour la dernière question, considérer la marche aléatoire simple sur l'arbre ternaire infini (par exemple).